RECHERCHES
SUR LA DE'CLINAISON DE L'AIGUILLE AIMANTÉE.

PAR M. EULER.

La Carte que feu M. *Halley* a donnée ſur la déclinaiſon de l'aiguille aimantée eſt trop connue, pour que j'aye beſoin d'en donnet une deſcription détaillée. On y voit d'abord deux lignes courbes, qui paſſent par les endroits de la Terre, où la déclinaiſon a été nulle au commencement de ce ſiècle, pour lequel tems cette Carte fut dreſſée. Enſuite elle contient auſſi des lignes tirées par les endroits, où la declinaiſon fut alors de 5°, ou de 10°, ou de 15° &c. tant vers l'eſt que vers l'oüeſt. Comme cette Carte n'eſt fondée que ſur des obſervations, elle offre un très important ſujet à la Théorie, pour rendre raiſon de la figure de ces lignes, qui au premier coup d'oeil paroiſſent extrêmement bizarres. Or tous ceux qui ont entrepris cette recherche, furent bientôt obligés de l'abandonnet par les difficultés presque inſurmontables, qu'ils y ont rencontrées. La principale cauſe n'étoit pas tant la figure bizarre des lignes Halleyennes, qui ne ſemble ſuſceptible d'aucune loi geomètrique, que la perſuaſion, où l'on étoit par l'autorité de M. *Halley*, que les phénomenes de la déclinaiſon magnétique étoient cauſés par quatre poles magnétiques, qui ſe trouvoient dans les entrailles de la Terre, dont il avoit ſuppoſé deux fixes & deux mobiles, pour ren-

rendre raiſon des changemens, qu'on obſerve avec le tems dans la déclinaiſon du même endroit.

Si nous étions bien aſſurés, qu'il y eut effectivement quatre poles magnétiques dans la Terre, comme on le croit généralement ſur l'autorité de M. *Halley*, je conviens qu'une telle entrepriſe ſeroit trop hardie du moins pour l'état préſent de nos connoiſſances, puiſque la force directrice, dont deux ou pluſieurs aimants agiſſent à la fois ſur une aiguille, nous eſt encore tout à fait inconnue : & il vaudroit ſans doute mieux d'abandonner d'abord cette entrepriſe, que de la fonder ſur des hypotheſes arbitraires. Il y a auſſi grande apparence, que quand même on connoitroit à fond l'action ſimultanée de deux aimants ſur une aiguille, le dévelopement demanderoit des calculs trop compliqués. Mais, avant que nous renoncions tout à fait à cette recherche, il faudroit examiner plus ſoigneuſement, ſi la raiſon, pourquoi M. *Halley* a établi quatre poles dans la Terre, eſt bien ſolide : car, en cas que la Terre n'eut que deux poles magnétiques, le problème ſe réduiroit à la pure Geométrie. Or la principale & l'unique raiſon, que M. *Halley* apporte pour établir quatre poles magnétiques, ſe réduit à ce raiſonnement :

Si la Terre n'avoit que deux poles magnétiques, ſous chaque méridien la bouſſole devroit décliner par tout en même ſens, ou vers l'eſt ou vers l'oüeſt.

Mais on a obſervé que ſous le méridien, qui paſſe par la baye de Hudſon & les côtes du Breſil, la déclinaiſon étoit occidentale dans la baye de Hudſon & orientale ſur les côtes du Breſil, & même fort grande dans l'un & l'autre endroit.

D'où il s'enſuit, que deux poles magnétiques ne ſont pas ſuffiſans pour expliquer les phénomenes de la déclinaiſon.

Pour examiner la force de ce raiſonnement, je remarque d'abord, que, ſi les deux poles magnétiques étoient diamétralement oppoſés, il ne

ne ſauroit arriver, que ſous un même méridien la déclinaiſon fut quelque part orientale, & dans un autre endroit occidentale. Mais, dès que les deux poles magnétiques ne ſont plus diamètralement oppoſés l'un à l'autre, la premiere propoſition perd toute ſa force, & il peut alors fort bien arriver, que ſous un même méridien la déclinaiſon ſoit quelque part orientale, & en d'autres endroits occidentale. Comme je prouverai cela indubitablement dans la ſuite, il me ſera permis de regarder l'hypotheſe de quatre poles magnétiques comme fort douteuſe; & avant qu'on ait très évidemment prouvé, que deux poles magnétiques ne ſont pas ſuffiſans pour expliquer les phénomenes de la declinaiſon magnétique, ce ſeroit contre les régles d'une bonne Phyſique ſi l'on vouloit recourir à quatre poles. Après cette remarque, voilà un probleme bien important, qui eſt de déterminer la déclinaiſon de l'aiguille aimantée pour tous les lieux de la terre, lorsque les deux poles magnétiques ne ſont pas diamètralement oppoſés. Pour mieux épuiſer ce probleme, qui eſt, comme on verra, d'une fort grande étendue, & qui renferme des recherches très curieuſes, je commencerai par conſidérer le cas, où les deux poles magnétiques ſont diamètralement oppoſés; enſuite je les ſuppoſerai en deux méridiens oppoſés, mais non pas également éloignés des poles de la Terre. En troiſième lieu, je les ſuppoſerai dans un même méridien; & enfin quatrièmement, en deux méridiens différens, d'où je partagerai mes recherches en quatre Sections. Si la Terre n'a que deux poles magnétiques, comme j'eſpère de le prouver, ces quatre cas peuvent devenir également intéreſſans; car, puiſqu'il eſt certain, que ces poles changent de place avec le tems, il eſt poſſible que chaque cas ait déjà exiſté, ou qu'il aura un jour lieu.

PRE-

PREMIERE SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre étant diamètralement oppoſés.

I.

Comme cette recherche, de même que les ſuivantes, demandent la réſolution analytique des triangles ſphériques, il ſera bon d'en mettre les formules devant les yeux, afin qu'on n'ait pas beſoin de les chercher ailleurs. Je commencerai donc par les triangles rectangles; marquant les trois angles par les lettres A, B, C dont C eſt ſuppoſé droit, & les côtés qui leur ſont oppoſés par les lettres a, b, c, dont c ſera l'hypotenuſe. Les régles pour la réſolution ſont contenuës dans les Lemmes ſuivans. Fig. 1.

LEMME 1.

II. L'hypothenuſe c avec un cathete a d'un triangle ſphérique ABC étant donnés, trouver l'autre cathete b avec les angles A & B.

RESOLUTION.

I. $\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}$; II. $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$; III. $\cos B = \frac{\tang a}{\tang c}$.

LEMME 2.

III. Les deux cathetes a & b d'un triangle rectangle ſphérique étant donnés, trouver l'hypotenuſe c avec les angles A & B.

RÉSOLUTION.

I. $\cos c = \cos a \cos b$; II. $\tang A = \frac{\tang a}{\sin b}$; III. $\tang B = \frac{\tang b}{\sin a}$.

LEMME 3.

IV. L'hypotenuſe c, avec un des angles A d'un triangle rectangle ſphérique, étant donnés, trouver l'autre angle B avec les cathetes a & b.

RESO-

RÉSOLUTION.

I. cot. $B = \text{cof} c \text{ tang } A$; II. $\text{fin } a = \text{fin } c \text{ fin } A$; III. $\text{tang } b = \text{tang } c \text{ cof} A$.

LEMME 4.

V. Un cathete a avec l'angle, qui lui eſt oppoſé A, d'un triangle rectangle ſphérique, étant donnés, trouver l'hypotenuſe c, & l'autre cathete b, avec l'angle, qui lui eſt oppoſé B.

RÉSOLUTION.

I. $\text{fin } c = \frac{\text{fin } a}{\text{fin } A}$; II. $\text{fin } b = \frac{\text{tang } a}{\text{tang } A}$; III. $\text{fin } B = \frac{\text{cof} A}{\text{cof} a}$.

LEMME 5.

VI. Un cathete a avec l'angle B, qui lui n'eſt pas oppoſé, d'un triangle ſphérique rectangle, étant donnés, trouver l'hypotenuſe c, & l'autre cathete b avec l'angle A.

RÉSOLUTION.

I. $\text{tang } c = \frac{\text{tang } a}{\text{cof} B}$; II. $\text{tang } b = \text{fin } a \text{ tang } B$; III. $\text{cof} A = \text{cof} a \text{ fin } B$.

LEMME 6.

VII. Les deux angles A & B d'un triangle rectangle ſphérique étant donnés, trouver l'hypotenuſe c avec les deux cathetes a & b.

RÉSOLUTION.

I. $\text{cof} c = \text{cot. } A \text{ cot } B$; II. $\text{cof} a = \frac{\text{cof} A}{\text{fin } B}$; III. $\text{cof} b = \frac{\text{cof} B}{\text{fin } A}$.

VIII. Soit maintenant ABC un triangle ſphérique quelconque, dont les angles ſoient indiqués par les lettres A, B, C, & les côtés entant qu'ils leur ſont oppoſés par les lettres a, b, c. Les réſolutions de tous les cas ſe reduiſent aux Lemmes ſuivans.

LEMME 7.

IX. Dans un triangle ſphérique quelconque, les trois côtés a, b, c étant donnés, trouver les angles A, B, C.

RÉSOLUTION.

I. $\text{cof A} = \frac{\text{cof } a - \text{cof } b \,.\, \text{cof } c}{\text{fin } c \,.\, \text{fin } b}$

II. $\text{cof B} = \frac{\text{cof } b - \text{cof } a \,.\, \text{cof } c}{\text{fin } a \,.\, \text{fin } c}$

III. $\text{cof C} = \frac{\text{cof } c - \text{cof } a \,.\, \text{cof } b}{\text{fin } a \,.\, \text{fin } b}$

LEMME 8.

X. Dans un triangle ſphérique quelconque, les trois angles A, B, C étant donnés, trouver les côtés a, b, c.

RÉSOLUTION.

I. $\text{cof } a = \frac{\text{cof A} + \text{cof B} \,.\, \text{cof C}}{\text{fin B} \,.\, \text{fin C}}$

II. $\text{cof } b = \frac{\text{cof B} + \text{cof A} \,.\, \text{cof C}}{\text{fin A} \,.\, \text{fin C}}$

III. $\text{cof } c = \frac{\text{cof C} + \text{cof A} \,.\, \text{cof B}}{\text{fin A} \,.\, \text{fin B}}$

LEMME 9.

XI. Dans un triangle ſphérique quelconque, deux côtés a & b avec l'angle C compris entr'eux, étant donnés, trouver le troiſième côté c avec les deux autres angles A & B.

RÉSOLUTION.

I. $\text{cof } c = \text{cof } a \,.\, \text{cof } b + \text{fin } a \text{ fin } b \text{ cof C}$

II. $\text{tang A} = \frac{\text{fin } a \text{ fin C}}{\text{cof } a \text{ fin } b - \text{fin } a \text{ cof } b \text{ cof C}}$

III. $\text{tang B} = \frac{\text{fin } b \text{ fin C}}{\text{cof } b \text{ fin } a - \text{fin } b \text{ cof } a \text{ cof C}}$

LEM-

LEMME 10.

XII. Dans un triangle ſphérique quelconque, deux angles A & B avec le côté compris entr'eux c étant donnés, trouver le troiſième angle C avec les deux autres côtés a & b.

RÉSOLUTION.

I. $\text{cof}\,C = \text{cof}\,c.\,\text{ſin}\,A.\,\text{ſin}\,B - \text{cof}\,A.\,\text{cof}\,B$

II. $\text{tang}\,a = \dfrac{\text{ſin}\,A\,\text{ſin}\,c}{\text{cof}\,A\,\text{ſin}\,B + \text{ſin}\,A\,\text{cof}\,B\,\text{cof}\,c}$

III. $\text{tang}\,b = \dfrac{\text{ſin}\,B\,\text{ſin}\,c}{\text{cof}\,B\,\text{ſin}\,A + \text{ſin}\,B\,\text{cof}\,A\,\text{cof}\,c}$

LEMME 11.

XIII. Dans un triangle ſphérique quelconque, deux côtés a & b avec les angles A & B, qui leur ſont oppoſés, étant donnés trouver le troiſième côté c avec le troiſième angle C.

Il faut ici remarquer, qu'il ſuffit, que des quatre élémens a, b, & A, B trois ſoient donnés, puiſqu'on a toujours $\text{ſin}\,a : \text{ſin}\,A = \text{ſin}\,b : \text{ſin}\,B$.

RÉSOLUTION.

I. $\text{tang}\,c = \dfrac{\text{ſin}\,a\,\text{ſin}\,A - \text{ſin}\,b\,\text{ſin}\,B}{\text{cof}\,a\,\text{ſin}\,A\,\text{cof}\,B - \text{cof}\,b\,\text{cof}\,A\,\text{ſin}\,B}$

ou $\text{ſin}\,c = \dfrac{\text{ſin}\,a\,\text{ſin}\,A - \text{ſin}\,b\,\text{ſin}\,B}{\text{cof}\,a\,\text{cof}\,A\,\text{ſin}\,B - \text{cof}\,b\,\text{ſin}\,A\,\text{cof}\,B}$

II. $\text{tang}\,C = \dfrac{\text{ſin}\,a\,\text{ſin}\,A - \text{ſin}\,b\,\text{ſin}\,B}{\text{cof}\,a\,\text{ſin}\,b\,\text{cof}\,B - \text{ſin}\,a\,\text{cof}\,b\,\text{cof}\,A}$

ou $\text{ſin}\,C = \dfrac{\text{ſin}\,a\,\text{ſin}\,A - \text{ſin}\,b\,\text{ſin}\,B}{-\text{cof}\,a\,\text{ſin}\,b\,\text{cof}\,A + \text{ſin}\,a\,\text{cof}\,b\,\text{cof}\,B}$

PROBLEME I.

Fig. 2. XIV. *La position des poles magnétiques* A & B *à l'égard des poles de la terre* P & p *étant donnée, déterminer, pour un lieu quelconque de la terre* L *la déclinaison de la bouſſole.*

SOLUTION.

Soit P le pole arctique, & p l'antarctique de la terre: que le pole magnétique boreal ſe trouve en A, & le méridional qui lui eſt diamétralement oppoſé en B. Qu'on tire un méridien P A p, qui étant continué paſſe par les deux poles magnétiques; & j'enviſagerai ici comme le premier méridien, celui P A p, qui paſſe par le pole magnétique boreal. Puiſqu'on ſuppoſe donnée la poſition de ces poles, & que les ares AP & Bp ſont égaux, je poſe AP $=$ Bp $= a$. Soit maintenant un lieu quelconque de la terre L, par lequel faiſant paſſer le méridien P L p, ſoit ſa longitude exprimée par l'angle APL $= q$, & ſa diſtance au pole arctique ou l'arc PL $= p$. Qu'on tire auſſi par L & les poles magnétiques A & B le grand cercle ALB, & il eſt clair que l'aiguille aimantée en L doit ſuivre la direction de ce grand cercle; de ſorte que l'angle PLA en marque la déclinaiſon, qui ſelon la figure ſera orientale, en ſuppoſant l'orient vers E & l'occident vers F: où il faut remarquer que je compterai toujours la longitude ou l'angle APL vers l'oüeſt. On aura donc dans le triangle ſphérique APL les deux côtés AP $= a$; PL $= p$, avec l'angle compris APL $= q$; d'où l'on trouvera l'angle PLA, ou la déclinaiſon magnétique. Donc, ſi nous poſons cette déclinaiſon $= \delta$ entant qu'elle eſt ſuppoſée orientale, on aura

$$\text{tang.}\,\delta = \frac{\text{ſin}\,a\ \text{ſin}\,q}{\text{coſ}\,a\ \text{lin}\,p - \text{ſin}\,a\ \text{coſ}\,p\ \text{coſ}\,q}$$

d'où l'on connoitra pour tous les lieux de la terre la déclinaiſon magnétique.

COROLL. 1.

XV. Tant que la valeur de cette formule eſt poſitive, la déclinaiſon ſera orientale: mais, ſi elle devient négative, l'angle δ devenant auſſi négatif, marquera une déclinaiſon occidentale.

COROLL. 2.

XVI. Or l'angle δ ne ſauroit devenir négatif, à moins qu'on ne prenne l'angle q plus grand que de 180°; car, tant que ſin q, eſt poſitif, la déclinaiſon eſt partout tournée vers l'Eſt, comme l'on voit par la figure. Car, quoique le dénominateur devienne négatif, cette négation ſe rapporte au coſinus de l'angle δ, qui ſurpaſſera alors 90°.

COROLL. 3.

XVII. Dans le premier méridien PEp, où $q = 0$, il y aura partout tang $\delta = 0$, donc ou $\delta = 0$ ou $\delta = 180°$. Or il eſt évident, que partout l'arc AP la déclinaiſon ſera nulle: mais dans l'intervalle AP, où le bout méridional de l'aiguille eſt tourné vers P, la déclinaiſon doit être cenſée de 180°.

COROLL. 4.

XVIII. Il en eſt de même du méridien oppoſé PFp, qui paſſe par l'autre pole magnétique B, où par toute l'étendue de l'arc PFB la déclinaiſon eſt $= 0$, & par l'intervalle Bp de 180°. Partout ailleurs, où ſin q n'eſt pas $= 0$, la déclinaiſon ne ſauroit évanouir.

COROLL. 5.

XIX. Dans cette hypothéſe donc, la ligne où il n'y a point de déclinaiſon, eſt compoſée des méridiens PEp & PFp, ſi nous y comprenons auſſi les endroits où la déclinaiſon eſt de 180°: que le calcul repréſente conjointement.

COROLL. 6.

XX. Pour calculer plus promtement la déclinaiſon, on n'a qu'à chercher un angle t, en ſorte que tang $t =$ rang a cos q, & alors on aura tang $\delta = \frac{\text{rang } q \text{ ſin } t}{\text{ſin } (p - t)}$.

1. REMARQUE.

XXI. Il ſemble douteux dans les cas, où l'expreſſion trouvée pour tang δ devient négative, s'il faut alors prendre l'angle δ négatif, ou plus grand que de 90°, puisque deux angles $-\Phi$ & $180° - \Phi$, ont la même tangente négative. Mais toute équivoque évanouira dabord, ſi l'on procede par degrés en cherchant la déclinaiſon : car alors, quand la valeur de tang δ devient négative après avoir paſſé par 0, l'angle δ eſt certainement négatif : mais ſi tang δ de poſitif devient négatif en paſſant par l'infini, où l'on a $\delta = 90°$, alors on eſt bien aſſuré, que l'angle δ eſt obtus.

2. REMARQUE.

XXII. Sous un même méridien, les quantités q & t demeurant les mêmes, la déclinaiſon magnétique δ eſt fort variable. Car ſi $p = t$, on aura $\delta = 90°$, & où $p < t$, la déclinaiſon eſt encore plus grande. Or ſi $p > t$, la déclinaiſon décroit jusqu'à ce qu'il devienne $p - t = 90°$ où elle doit être la plus petite, & augmentera de nouveau dès qu'on prend $p - t > 90°$. Cet endroit où la déclinaiſon eſt la plus petite ſous le même méridien, mérite une recherche particuliere, à laquelle le problême ſuivant eſt deſtiné. D'ailleurs il eſt bien clair, que dans cette hypothéſe il eſt impoſſible, que ſous un même méridien la déclinaiſon ſoit orientale & occidentale à la fois, comme M. *Halley* l'a obſervée ſous le méridien de la baye de Hudſon : & ſi la même impoſſibilité avoit lieu en général pour deux poles magnétiques, de quelque maniere qu'ils fuſſent ſitués, nous ſerions bien obligés d'embraſſer le ſentiment de 4 poles magnétiques. Mais le contraire ſera mis hors de doute dans la ſuite.

3. REMARQUE.

XXIII. Il eſt ici fort important d'ajouter une remarque ſur le principe, d'où la ſolution du problême a été tirée. J'ai ſuppoſé du conſentement de tous les Phyſiciens, que la direction de l'aiguille ſuit le grand cercle, qui paſſe par le lieu propoſé aux poles magnétiques. Quel-

Quelqu'évident que paroiſſe ce principe par rapport au cas préſent, il s'en faut beaucoup qu'il ſoit ſi général, qu'on pourroit penſer. Car, dès que les deux poles magnétiques ne ſont plus diamètralement oppoſés, on pourroit bien tirer d'un lieu propoſé quelconque un arc de grand cercle à chaque pole magnétique ; mais ces deux arcs feroient un angle enſemble, & il n'y auroit point de raiſon, pourquoi l'un plutôt que l'autre marquât la direction magnétique. D'où je conclus que dans le cas préſent auſſi, où les deux poles magnétiques ſont diamètralement oppoſés, le grand cercle ALB ne marque pas la direction magnétique, parce que ce cercle eſt le plus court chemin du point L à chaque pole magnétique : mais que la raiſon doit être cherchée dans un autre principe. Ce principe ne dépend pas ſans doute de la ſurface de la terre : car, quand même la terre ſeroit couverte d'une croûte quelconque non magnétique, la direction magnétique demeureroit la même. Il faut donc qu'elle dépende uniquement des poles magnétiques, & il eſt évident qu'elle ſera toujours dans un même plan avec les poles magnétiques. C'eſt auſſi la raiſon, pourquoi dans notre cas le grand cercle tiré par les poles magnétiques & le lieu propoſé marque la juſte direction, puiſqu'il repréſente le plan qui paſſe par les poles magnétiques. Donc, en quelque endroit, ſoit hors de la terre, ſoit au dedans, qu'on veuïlle déterminer la direction magnétique, elle ſe trouvera toujours dans le plan tiré par cet endroit propoſé & les poles magnétiques.

PROBLEME II.

XXIV. *Sous chaque méridien de la terre* PLp *déterminer le lieu* L, *où la déclinaiſon magnétique eſt la plus petite, les deux poles magnétiques étant diamètralement oppoſés.*

SOLUTION.

Ayant poſé les diſtances $AP = B\cdot = a$, & pour un lieu quelconque L l'angle $APL = q$, & l'arc $PL = p$, la déclinaiſon en L, bui ſoit $= \delta$ tournant vers l'orient, nous avons trouvé

$$\text{tang } \delta = \frac{\text{ſin } a \text{ ſin } q}{\text{coſ } a \text{ ſin } p - \text{ſin } a \text{ coſ } p \text{ coſ } q},$$

où il s'agit de déterminer l'arc p enſorte, que cette expreſſion devienne la plus petite. Or on trouvera

$$\text{coſ } a \text{ coſ } p + \text{ſin } a \text{ ſin } p \text{ coſ } q = 0, \quad \text{ou} \quad \text{tang } p = -\frac{1}{\text{tang } a \text{ coſ } q}.$$

Pour connoitre mieux cette expreſſion, tirons auſſi du triangle ſphèrique APL le coté AL, qu'on trouve

$$\text{coſ AL} = \text{coſ } a \text{ coſ } p + \text{ſin } a \text{ ſin } p \text{ coſ } q,$$

d'où l'on voit que la déclinaiſon ſous le méridien PLp eſt la plus petite là, où coſ AL $= 0$, c'eſt à dire, où l'arc AL eſt de 90°.

Ayant trouvé ce point L, ou coſa coſp + ſin$a$ ſin$p$ coſ$q = 0$, on aura pour la plus petite déclinaiſon

$$\text{tang } \delta = \frac{\text{ſin } a \text{ ſin } p \text{ ſin } q}{\text{coſ } a} = \text{tang } a \text{ ſin } p \text{ ſin } q.$$

Mais ſachant à préſent, que dans le triangle ſphèrique APL le côté AL eſt un quart de cercle, on en tirera cette proportion

$$1 : \text{ſin } q = \text{ſin } a : \text{ſin } \delta \quad \text{donc} \quad \text{ſin } \delta = \text{ſin } a \text{ ſin } q,$$

d'où l'on voit que parmi les plus petites déclinaiſons de tous les méridiens la déclinaiſon ſera la plus grande dans celui qui eſt perpendiculaire au méridien PEp, où $q = 90$, ou l'on aura $\delta = a$ & $p = 90°$.

COROLL. 1.

XXV. Donc ſi nous tirons un grand cercle COD perpendi-
Fig. 3. culaire à l'axe magnétique AB, qui repréſentera l'équateur magnétique, ce grand cercle coupera tous les méridiens aux points O, où la déclinaiſon magnétique eſt la plus petite pour chacun.

COROLL. 2.

XXVI. Puisque l'arc AC $=$ BC $= 90°$, on aura l'arc PAC $= a + 90°$, & l'angle ACO étant droit, la réſolution du tri-

triangle PCO donnera : tang OC $=$ cof a tang q, & comme nous avons déjà trouvé tang PO $=\frac{1}{\text{tang } a \text{ cof } q}$.

COROLL. 3.

XXVII. Que α marque la plus petite déclinaiſon ſous le méridian POp, de ſorte que ſin α $=$ ſin a ſin q, & poſant PO $=$ m, de ſorte que cot. m $=$ $-$ tang a cof q. Pour un autre lieu quelconque L du même méridien, où PL $=$ p, on trouvera la déclinaiſon δ en ſorte $\text{tang } \delta = \frac{\text{ſin } \alpha \text{ ſin } m}{\text{cof } a \text{ cof } (m-p)} = \frac{\text{tang } \alpha}{\text{cof } (m-p)}$.

COROLL. 4.

XXVIII. Cela devient plus évident ſi nous tirons les arcs OA & LA, où ayant dans le triangle AOL les côtés AO $=$ 90°, OL $=$ $m-p$ avec l'angle POA $=$ α, on trouve l'angle PLA $=$ δ, en ſorte que $\text{tang } \delta = \frac{\text{tang } \alpha}{\text{cof OL}}$: d'où l'on voit que de part & d'autre du point O, à égales diſtances OL $=$ Ol, la déclinaiſon ſera la même.

COROLL. 5.

XXIX. Si l'on prend CZ $=$ 90°, ou que Z ſoit le pole du grand cercle PApB, la déclinaiſon magnétique y eſt $=$ a, qui eſt la plus grande dans tout l'équateur magnétique COD. Car en C & D la déclinaiſon évanouït, & ſi nous poſons l'arc CO $=$ r, la déclinaiſon en O étant $=$ α, on trouve tang α $=$ tang a ſin r.

REMARQUE.

XXX. Puiſque la plus petite déclinaiſon ſous le méridien POp en O eſt $=$ α, en ſorte que ſin α $=$ ſin a ſin APO, par tout ailleurs la déclinaiſon ſera plus grande. Donc ſi nous cherchons ſelon l'idée de M. *Halley* des lignes, qui paſſent par tous les endroits, où la déclinaiſon eſt donnée & moindre que α, ces lignes ne ſauroient couper nulle part le méridien POp. Et puiſque la déclinaiſon en Z eſt $=$ a, tou-

tes les lignes Halleyennes qui marquent une moindre déclinaiſon que a, n'arteindront nulle part au méridien qui paſſe par le point Z. Or les lignes Halleyennes, qui marquent une plus grande déclinaiſon que a, doivent paſſer par tous les méridiens, comme nous verrons dans le problème ſuivant, où nous examinerons la figure des lignes Halleyennes.

PROBLEME III.

XXXI. *Les poles magnétiques étant diamètralement oppoſés, déterminer les lignes Halleyennes qui paſſent par tous les endroits, où la déclinaiſon de la bouſſole eſt d'une quantité donnée.*

SOLUTION.

Si l'on cherche la ligne, où il n'y a aucune déclinaiſon, à cauſe de $\text{tang}\,\delta = 0$ on aura $\text{ſin}\,q = 0$, d'où l'on voit que cette ligne comprend les deux méridiens oppoſés PAp & PBp : ſous leſquels la déclinaiſon magnétique évanouït comme j'ai déjà remarqué.

Mais que la déclinaiſon propoſée δ ait une valeur quelconque, & prenant l'angle q à plaiſir, on trouvera la diſtance $PL = p$ par cette équation : $\text{coſ}\,a\,\text{ſin}\,p - \text{ſin}\,a\,\text{coſ}\,p\,\text{coſ}\,q = \text{ſin}\,a\,\text{ſin}\,q\,\text{cot.}\,\delta$ dont la conſtruction la plus commode ſe tire du §. 27. Qu'on cherche un arc m tel que $\text{cot.}\,m = -\,\text{tang}\,a\,\text{coſ}\,q$, & ayant $\text{tang}\,\delta = \frac{\text{tang}\,a\,\text{ſin}\,q\,\text{ſin}\,m}{\text{coſ}(m-p)}$, on aura $\text{coſ}(m-p) = \frac{\text{tang}\,a\,\text{ſin}\,q\,\text{ſin}\,m}{\text{tang}\,\delta}$. Ou bien, après avoir trouvé l'angle m, qu'on cherche un autre n en ſorte que $\text{coſ}\,n = \frac{\text{tang}\,a\,\text{ſin}\,q\,\text{ſin}\,m}{\text{tang}\,\delta}$; & de là on tirera deux valeurs pour l'arc $PL = p$, ſavoir ou $p = m + n$ ou $p = m - n$. Puiſque $\text{tang}\,a = -\frac{\text{cot.}\,m}{\text{coſ}\,q}$, on pourra auſſi déterminer l'arc n par cette équation : $\text{coſ}\,n = -\frac{\text{tang}\,q\,\text{coſ}\,m}{\text{tang}\,\delta}$.

co-

COROLL. 1.

XXXII. La ſolution deviendra impoſſible, ou la ligne Halleyenne cherchée ne paſſera point par le méridien P L p, lorsque tang $\delta <$ tang q cos m, ou bien lorsque tang $\delta^2 < \frac{\sin a^2 \sin q^2}{\cos a^2 + \sin a^2 \cos q^2}$ à cauſe de cot $m = -$ tang a cos q. C'eſt à dire lorsque $1 +$ tang $\delta^2 > \frac{1}{\cos a^2 + \sin a^2 \cos q^2}$, ou lorsque $\sin \delta < \sin a \sin q$ ou bien $\sin q > \frac{\sin \delta}{\sin a}$, comme nous l'avons déjà remarqué §. XXX.

COROLL. 2.

XXXIII. Si l'on prend q négatif, l'arc m demeure le même, & ſi l'on prend outre cela δ négatif, l'arc n ne changera pas non plus : d'où l'on entend que dans l'autre hemiſphère les lignes Halleyennes ſont les mêmes, en ſe rapportant à une déclinaiſon égale & contraire $-\delta$.

COROLL. 3.

XXXIV. Si la déclinaiſon δ doit être $= a$, on aura cos $n = \sin q \sin m$, ce qui eſt toujours poſſible : & prenant outre cela $q = 90°$, à cauſe de $m = 90°$, on aura $n = 0$, & les deux valeurs de p ſe réuniſſent dans une ſeule $p = 90°$ ou bien cette ligne aura en Z un point double.

COROLL. 4.

XXXV. Si l'on poſe $q = 0$, on aura cos $m = -$ tang a, ou $90° - m = -a$, & partant $m = 90° + a$. Enſuite cos $n = 0$, donc $n = 90°$, les deux valeurs de p ſeront donc $p = a$ & $p = 180 + a$. D'où nous voyons que toutes les lignes Halleyennes paſſent par les deux poles magnétiques A & B.

COROLL. 5.

XXXVI. Toutes ces lignes paſſent auſſi par les deux poles P & p : car faiſant $p = 0$, on a : $-\sin a \cos q = \sin a \sin q \cot \delta$

ou bien tang $q = -$ tang δ : ce qui donne $q = 180° - \delta$, laquelle valeur eſt toujours poſſible. De même faiſant $p = 180$, on aura tang $q =$ tang δ ou $q = \delta$, qui eſt auſſi toujours poſſible.

1. REMARQUE.

XXXVII. Mais poſant $q = 180° - \delta$, outre la valeur $p = o$ on trouve encore une autre $\frac{\text{cof } a}{\text{ſin } a \text{ cof } \delta} = \frac{1 - \text{cof } p}{\text{ſin } p} =$ tang $\frac{1}{2} p$ & poſant $q = \delta$, la premiere équation donne

$$\text{cof } a \text{ ſin } p - \text{ſin } a \text{ cof } p \text{ cof } \delta = \text{ſin } a \text{ cof } \delta \quad \text{donc}$$

$$\frac{\text{cof } a}{\text{ſin } a \text{ cof } \delta} = \frac{1 + \text{cof } p}{\text{ſin } p} = \text{cof } \tfrac{1}{2} p \quad \text{ou bien}$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} p = \text{tang } a \text{ cof } \delta.$$

Au reſte il ne faut pas être ſurpris, que toutes les lignes Halleyennes paſſent tant par les poles magnétiques que par les poles naturels de la terre : car dans les poles magnétiques toute déclinaiſon doit être cenſée y avoir lieu, & dans les poles naturels de la Terre il en eſt de même, puisque tous les méridiens s'y confondent.

2. REMARQUE.

XXXVIII. Il ne ſera pas hors de propos d'enſeigner ici en général la réſolution d'une telle équation :

$$A \text{ ſin } p + B \text{ cof } p = C$$

ſans extraction de la racine quarrée. On n'a qu'à chercher un angle m de ſorte tang $m = \frac{A}{B}$, & puisque

$$B \text{ tang } m \text{ ſin } p + B \text{ cof } p = C \quad \text{ou}$$

$$B \text{ cof } (m - p) = C \text{ cof } m \quad \text{on aura}$$

$$\text{cof } (n - p) = \frac{C \text{ cof } m}{B} = \frac{C \text{ ſin } m}{A} = \text{cof } n$$

d'où à cauſe de cof n = cof $- n$ on tire deux valeurs ſavoir $p = m \pm n$.

PRO-

PROBLEME IV.

XXXIX. *Déterminer plus exactement la figure des lignes Halleyennes, lorsque la déclinaiſon magnétique δ eſt plus petite que la diſtance des poles magnétiques aux poles de la terre* AP = B*p* = *a*.

SOLUTION.

Une telle ligne paſſera d'un pole magnétique A au pole oppoſé *p* de la Terre. Soit donc A Y F *p* une telle ligne, & pour en connoitre mieux le cours, qu'on prenne un arc A X = *x* pour abſciſſe & l'arc X Y = *y*, pour appliquée qui y ſoit perpendiculaire. Donc, puisque P X = *a* + *x*, à cauſe de A P Y = *q* & P Y = *p*, on aura $\cos p = \cos(a+x)\cos y$; $\sin q = \frac{\sin y}{\sin p}$ & $\cos q = \frac{\tang(a+x)}{\tang p}$; ſubſtituons ces valeurs dans l'équation $\tang\delta(\cos a \sin p - \sin a \cos x \cos q) = \sin a \sin q$ pour avoir

$$\tang\delta\left(\cos a \sin p - \frac{\sin a \cos p^2 \tang(a+x)}{\sin p}\right) = \frac{\sin a \sin y}{\sin p}$$

qui ſe réduit en ſubſtituant pour *p* ſa valeur à celle-cy

$$\tang\delta\ (\cos a - \cos x \cos(a+x)\cos y^2) = \sin a \sin y$$

D'où l'on voit que l'appliquée *y* évanouit en prenant tant $x = 0$, que $x = 180 - a$; enſuite ſi $x = -a$, & $\sin x = 180°$, de ſorte que l'appliquée *y* évanouit dans les quatre points A, *p*, P & B. Enſuite la valeur de *y* demeure la même quand on écrit au lieu de *x* tant $180 - a - x$; que $-a - x$ & $180 + x$; d'où l'on connoit que la courbe ſort par des branches ſemblables des quatre poles A, *p*, P & B, de ſorte que la courbe A F *p* ayant deux branches ſemblables A F & *p* F, il y a de l'autre côté pour la même déclinaiſon δ une courbe ſemblable qui paſſe de P à B. La courbe A F *p* aura donc un point F, qui répond à l'abſciſſe $x = AE = 90 - \frac{1}{2}a$, où l'appliquée E F ſera la plus grande. Pour la trouver, poſons $x = 90° - \frac{1}{2}a$, & puisque $\cos x \cos(a+x) = -\sin\frac{1}{2}a \sin\frac{1}{2}a = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos a$ notre équation ſera

Fig. 4.

tang

$$\text{tang } \delta\,(\text{cof } a + \tfrac{1}{2}\,\text{cof } y^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{cof } a\,\text{cof } y^2) = \text{fin } a\,\text{fin } y$$

qui ſe réduit à celle-cy :

$$\text{fin } y^2 + \frac{2\,\text{cot. } \frac{1}{2}\,a\,\text{fin } y}{\text{fin } \delta} = \text{cot. } \tfrac{1}{2}\,a^2$$

ou $$\text{fin } y = -\frac{\text{cot. } \frac{1}{2}\,a\,(\text{cof } \delta + 1)}{\text{fin } \delta}$$

L'une de ces deux valeurs donne

$$\text{fin } y = -\text{ cot. } \tfrac{1}{2}\,a\,\text{ cot. } \tfrac{1}{2}\,\delta$$

& l'autre $\text{fin } y = \text{tang } \frac{1}{2}\,\delta\,\text{ cot. } \frac{1}{2}\,a = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}\,\delta}{\text{tang } \frac{1}{2}\,a}$.

Or la premiere eſt impoſſible, puisque $a < 90$ & $\delta < a$. d'où tant cot. $\frac{1}{2}\,a$ que cot. $\frac{1}{2}\,\delta$ ſurpaſſeront le ſinus total : & partant nous aurons $\text{fin EF} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}\,\delta}{\text{tang } \frac{1}{2}\,a}$, qui ne peut avoir lieu à moins qu'il ne ſoit $\delta < a$, comme nous le ſuppoſons.

Par la différentiation nous apprenons que la branche F Y A fait en A avec le premier méridien un angle $= \delta$: & toutes les autres branches font un angle égal avec ce premier méridien.

COROLL. 1.

XL. Si l'on prend δ négatif, on n'a qu'à poſer auſſi y négatif pour avoir la même équation, ce qui eſt une marque, que pour les déclinaiſons occidentales on a ſur l'autre hemiſphére les mêmes lignes Halleyennes.

COROLL. 2.

XLI. Plus la déclinaiſon δ eſt petite, plus la ligne Halleyenne A F p approche du méridien A p; & plus elle approche de la quantité a, plus ſon milieu F approche du ſommet Z de l'hemiſphére.

COROLL. 3.

XLII. On voit auſſi, que ces lignes ſe rapportent également aux poles naturels de la Terre, qu'aux poles magnétiques ; & que tant que

que $\delta < a$, ces lignes ſortent d'un pole magnétique, & qu'elles rentrent dans le pole naturel oppoſé, ſans atteindre juſqu'au méridien, qui paſſe par le milieu de l'hemiſphére.

1. REMARQUE.

XLIII. Quand on conſtruit quelques unes de ces lignes, on verra qu'elles ont au milieu F une prominence vers le ſommet de l'hemiſphére, qui devient de plus en plus grande & pointue, plus la déclinaiſon δ approche de la quantité a: & quand $\delta = a$, elle acquiert une vraye pointe angulaire, qui ſe change en une interſection de deux courbes, comme nous verrons après.

2. REMARQUE.

XLIV. Comme toutes les appliquées XY ſe réuniſſent au ſommet Z de l'hemisphére, le quart de cercle EFZ ſera un diamètre de la courbe: auquel ſi nous tirons de Y perpendiculairement l'arc YV & que nous nommions $ZV = t$ & $VY = u$, nous aurons $\cos ZY = \sin y = \cos t \cos u$, & $\operatorname{tang} XE = \operatorname{tang}(90° - \frac{1}{2}a - x)$ $= \cot.(\frac{1}{2}a + x) = \dfrac{\operatorname{tang} u}{\sin t} = \dfrac{\sin u}{\sin t \cos u}$. De là nous tirons $\cos(\frac{1}{2}a + x) = \dfrac{\sin u}{\cos y}$ & $\sin(\frac{1}{2}a + x) = \dfrac{\sin t \cos u}{\cos y}$; donc

$$\cos x = \frac{\cos\frac{1}{2}a \sin u + \sin\frac{1}{2}a \sin t \cos u}{\cos y} \quad \& \quad \cos(a+x) = \frac{\cos\frac{1}{2}a \sin u - \sin\frac{1}{2}a \sin t \cos u}{\cos y}$$

& partant

$$\cos x \cos(a+x) \cos y^2 = \cos\tfrac{1}{2}a^2 \sin u^2 - \sin\tfrac{1}{2}a^2 \sin t^2 \cos u^2$$

d'où nous trouvons entre t & u cette équation

$$\cos u - \cos\tfrac{1}{2}a^2 \sin u^2 + \sin\tfrac{1}{2}a^2 \sin t^2 \cos u^2 = \cot.\delta \sin a \cos t \cos u$$

qui ſe change en celle-cy:

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 \cos t^2 \cos u^2 = -2\cot.\delta \sin\tfrac{1}{2}a \cos\tfrac{1}{2}a \cos t \cos u + \cos\tfrac{1}{2}a^2 \cos u^2 - \sin\tfrac{1}{2}a^2 \sin u^2$$

& par l'extraction de racine:

$$\sin\tfrac{1}{2}a \cos t \cos u = -\frac{\cos\delta \cos\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\cos\tfrac{1}{2}a^2 - \sin\delta^2 \sin u^2)}}{\sin\delta}$$

De là on voit, que ſi $u = o$, ce qui arrive au point F, il y aura $\text{ſin}\,\frac{1}{2}a^2\,\text{cſ}t^2 = -2\cot.\delta\,\text{ſin}\,\frac{1}{2}a\,\text{cſ}\frac{1}{2}a\,\text{cſ}t + \text{cſ}\frac{1}{2}a^2$, ou $\text{coſ}t = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\delta}{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}$. Or poſons u infiniment petit, & ſoit $t = f + v$, prenant $f = \text{ZF}$, de ſorte que $\text{coſ}f = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\delta}{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}$ & $\text{F V} = v$ infiniment petit, & l'on trouve :

$$v\,\text{ſin}\,a\,\text{ſin}f + \tfrac{1}{2}\,v\,v\,\text{ſin}\,a\,\text{coſ}f = u\,u\,\text{ſin}\,\delta - \tfrac{1}{2}\,u\,u\,\text{ſin}\,a\,\text{coſ}f.$$

Donc, tant que $\delta < a$, la courbe ſera perpendiculaire en F à l'arc ZE, mais ſi $\delta = a$, & $f = o$, on aura l'équation $\frac{1}{2}vv = \frac{1}{2}uu$, ou $u = v$, de ſorte que l'angle de la courbe en F avec ZE eſt un demi-droit, & les branches de la courbe ſe couperont en Z à angles droits.

PROBLEME V.

Fig. 5. XLV. *Déterminer plus exactement la figure de la ligne Halleyenne qui paſſe par les lieux, où la déclinaiſon magnétique δ eſt égale à la diſtance des poles* $\text{AP} = \text{Bp} = a$.

SOLUTION.

Poſant $\delta = a$, on aura entre l'angle $\text{APY} = q$ & l'arc $\text{PY} = p$ cette équation

$$\text{coſ}a\,\text{ſin}p - \text{ſin}a\,\text{coſ}p\,\text{coſ}q = \text{coſ}a\,\text{ſin}q$$

Mais, ſi nous rapportons la courbe au méridien $\text{PAE}p$ par les coordonnées orthogonales $\text{AX} = x$ & $\text{XY} = y$, l'équation ſera :

$$\text{coſ}a - \text{coſ}x\,\text{coſ}(a+x)\,\text{coſ}y^2 = \text{coſ}a\,\text{ſin}\,y$$

qui en diviſant par $1 - \text{ſin}\,y$ ſe réduit à

$$\text{coſ}a = \text{coſ}x\,\text{coſ}(a+x)\,(1 + \text{ſin}\,y)$$

Or le diviſeur $1 - \text{ſin}\,y$ marque que la courbe a un point au ſommet Z, où toutes les appliquées ſe réuniſſent, l'autre équation donne

$$\text{ſin}\,y = \frac{\text{coſ}a - \text{coſ}x\,\text{coſ}(a+x)}{\text{coſ}x\,\text{coſ}(a+x)} = \text{tang}\,x\,\text{tang}\,(a+x)$$

Si

Si nous prenons les abſciſſes du point E en poſant $EX = z$ à cauſe de $x = 90° - \frac{1}{2}a - z$, nous aurons

$$\text{ſin}y = \text{cot.}(z+\tfrac{1}{2}a)\,\text{cot.}(z-\tfrac{1}{2}a) = \frac{\text{coſ}\frac{1}{2}a^2 - \text{ſin}\,z^2}{\text{ſin}\,z^2 - \text{ſin}\,\frac{1}{2}a^2} = \frac{\text{coſ}a + \text{coſ}2z}{\text{coſ}a - \text{coſ}2z}.$$

D'où l'on voit que coſ 2 z doit être négatif, & partant $z > 45°$ avant que le rayon ZX coupe la courbe, & que ſi $z = 45°$ ce rayon touche la courbe au ſommet Z, où quatre branches ſemblables ZP, ZA, Zp & ZB ſe coupent à angles droits. Or ſi nous partageons l'intervalle PA en deux parties égales en C, & que nous nommions l'are $CX = v$, & l'are $ZY = t$, à cauſe de $\text{coſ}t = \text{ſin}y$ & $z = 90° - v$, nous aurons $\text{coſ}t = \frac{\text{coſ}a - \text{coſ}2v}{\text{coſ}a + \text{coſ}2v}$: d'où nous voyons que tant que $v < \frac{1}{2}a$ ou CX < CA, la valeur de t ſurpaſſe 90°, & alors la continuation des ares ZA & ZP paſſe dans l'autre hemiſphére, où la déclinaiſon ſera $180 + a$, puisque tang δ eſt la même, ſoit qu'on prenne $\delta = a$ ou $\delta = 180° + a$. Or prenant $v = \frac{1}{2}a$ ou CX = CA, on a $\text{coſ}t = 0$, ou $t = 90°$ ce qui donne le point A, & en augmentant v au delà de $\frac{1}{2}a$, on trouve la courbe AY, jusqu'à ce qu'on poſe $v = 45°$, où $ZY = t$ evanouit. D'ailleurs prenant x infiniment petit, y le ſera auſſi, & on aura $\frac{y}{x} = \text{tang}\,a$, ce qui indique que chaque branche ZA fait en A avec le premier méridien un angle $= a$. Après cette inclinaiſon les quatre branches montent au ſommet Z, où elles ſe croiſent à angles droits.

COROLL. I.

XLVI. Tandis que la déclinaiſon δ étoit plus petite que a, les lignes Halleyennes ſortoient du point A pour rentrer en p, par une courbe continue AFp, qui avoit au milieu F une prominence vers le ſommet Z. Or à préſent cette prominence atteint le ſommet Z & ſe change en un angle droit. Fig. 4.

COROLL. 2.

Fig. 5. XLVII. La figure AFp, qu'avoient les lignes Halleyennes pendant que $\delta < a$, s'en va lorsque $\delta = a$ en celle-cy AYZyp, & perd en même tems la continuité : car maintenant l'arc Zp n'eſt plus la continuation de l'arc AZ., mais plutôt celle de l'arc PZ, & l'arc AZ a ſa continuation par l'arc ZB.

COROLL. 3.

XLVIII. Maintenant donc où $\delta = a$, des deux lignes Halleyennes qui repréſentent cette déclinaiſon, l'une AZB va d'un pole magnétique A à l'autre B, & l'autre PZp va d'un pole naturel de la Terre P à l'autre p: pendant qu'auparavant où $\delta < a$ ces lignes ont été tirées d'un pole magnétique au pole naturel oppoſé.

REMARQUE.

XLIX. Nous verrons bientôt, que lorsque $\delta > a$, les lignes Halleyennes prennent un tour encore différent, en paſſant d'un pole magnétique au pole naturel, qui lui eſt le plus proche. Entre ces deux cours différents le cas $\delta = a$ tient un milieu, & ne ſuit ni l'un ni l'autre, participant également de chacun : d'où cette ligne, que je viens de décrire, eſt fort remarquable. Elle eſt auſſi la ſeule qui forme une interſection, pendant que les branches des autres ne ſe coupent nulle part.

PROBLEME VI.

Fig. 6. L. *Déterminer plus exactement la figure des lignes Halleyennes, lorsque la déclinaiſon magnétique* δ *eſt plus grande que la diſtance des poles* AP = Pp = a.

SOLUTION.

Soit AFP une de ces lignes où $\delta > a$, & pour en connoitre le cours, nous n'avons qu'à prendre l'abſciſſe AX = x négative dans le problême IV. en laiſſant XY = y : & alors nous aurons :

$$\text{tang } \delta\,(\text{cof}\,a - \text{cof}\,x\,\text{cof}(a - x)\,\text{cof}\,y^2) = \text{ſin}\,a\,\text{ſin}\,y$$

Ou prenant E au milieu de l'arc AP, de ſorte que AE = $\frac{1}{2}a$, ſi nous po-

posons $EX = z$, à cause de $x = \frac{1}{2}a - z$, nous aurons :

$$\text{tang}\,\delta\,(\text{cos}\,a - \text{cos}(\tfrac{1}{2}a - z)\,\text{cos}(\tfrac{1}{2}a + z)\,\text{cos}\,y^2) = \text{sin}\,a\,\text{sin}\,y$$

d'où nous voyons que prenant z négatif ou positif l'équation ne change point, de sorte que les arcs AF & PF seront semblables. Pour trouver le milieu de cette courbe F soit $z = 0$; & on aura

$$\text{tang}\,\delta\,(\text{cos}\,a - \text{cos}\,\tfrac{1}{2}a^2\,\text{cos}\,y^2) = \text{sin}\,a\,\text{sin}\,y \quad \text{ou bien}$$

$$\text{tang}\,\delta\,(\text{cos}\,\tfrac{1}{2}a^2\,\text{sin}\,y^2 - \text{sin}\,\tfrac{1}{2}a^2) = 2\,\text{sin}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{cos}\,\tfrac{1}{2}a\,\text{sin}\,y$$

d'où l'on tire : $\text{sin}\,y = \dfrac{\text{sin}\,\frac{1}{2}a\,(\text{cos}\,\delta + 1)}{\text{sin}\,\delta\,\text{cos}\,\frac{1}{2}a} = \dfrac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\delta}$

qui n'est réelle que si $\delta > a$. Par conséquent ayant $\text{sin}\,EF = \dfrac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\delta}$, on voit que plus la déclinaison δ est grande, plus sera petit l'arc EF.

Nous avons déjà vu, que si $z = \frac{1}{2}a$ ou $x = 0$, l'appliquée y évanouit aussi, & que la courbe AY est inclinée au méridien Ap d'un angle $YAp = \delta$. Mais, posant $z = \frac{1}{2}a$, le quart de cercle ZYX coupera la courbe encore dans un autre point, Soit donc $x = 0$, & l'équation $\text{tang}\,\delta\,\text{cos}\,a\,\text{sin}\,y^2 = \text{sin}\,a\,\text{sin}\,y$, outre la valeur $y = 0$ donne encore $\text{sin}\,y = \dfrac{\text{tang}\,a}{\text{tang}\,\delta}$. L'abscisse $EX = z$ aura donc un *maximum*, qui sera là où

$$\text{cos}(\tfrac{1}{2}a - z)\,\text{cos}(\tfrac{1}{2}a + z) = \frac{\text{sin}\,a}{2\,\text{tang}\,\delta\,\text{sin}\,y} \quad \& \quad \text{sin}\,y = \frac{\text{tang}\,\delta - \sqrt{(\text{tang}\,\delta^2 - \text{tang}\,a^2)}}{\text{tang}\,a}$$

$$\& \text{ partant } \quad \text{cos}\,a + \text{cos}\,2z = \frac{\text{cos}\,a\,(\text{tang}\,\delta + \sqrt{(\text{tang}\,\delta^2 - \text{tang}\,a^2)})}{\text{tang}\,\delta}$$

$$\text{donc} \quad \text{cos}\,2z = \text{cos}\,a\,\sqrt{\left(1 - \frac{\text{tang}\,a^2}{\text{tang}\,\delta^2}\right)} = \sqrt{\left(1 - \frac{\text{sin}\,a^2}{\text{sin}\,\delta^2}\right)} \quad \text{de}$$

$$\text{forte que } \text{sin}\,2z = \frac{\text{sin}\,a}{\text{sin}\,\delta} \quad \& \quad \text{sin}\,y = \frac{\text{sin}\,\delta\,\text{cos}\,a - \sqrt{(\text{sin}\,\delta^2 - \text{sin}\,a^2)}}{\text{cos}\,\delta\,\text{sin}\,a}.$$

COROLL. I.

LI. Puisque $\text{cof}(\frac{1}{2}a - z)\,\text{cof}(\frac{1}{2}a + z) = \frac{1}{2}\text{cof}\,a + \frac{1}{2}\text{cof}\,2z$, l'équation entre y & z ſera exprimée en ſorte :

$$\text{tang}\,\delta(2\,\text{cof}\,a - \text{cof}\,a\,\text{cof}\,y^2 - \text{cof}\,2z\,\text{cof}\,y^2) = 2\,\text{ſin}\,a\,\text{ſin}\,y$$

d'où l'on tire ſans extraction de racine :

$$\text{cof}\,2z = \frac{\text{cof}\,a(1 + \text{ſin}\,y^2)}{\text{cof}\,y^2} - \frac{2\,\text{ſin}\,a\,\text{ſin}\,y}{\text{tang}\,\delta\,\text{cof}\,y^2}.$$

COROLL. 2.

LII. Les lignes des grandes déclinaiſons ſont donc renfermées tant entre les poles ſeptentrionaux P & A, que les méridionaux B & p, & approchent d'autant plus de l'arc AP, plus la déclinaiſon eſt grande : l'arc AP lui-même étant la ligne, où la déclinaiſon eſt de 180°.

REMARQUE.

Fig. 7. LIII. La 7me Figure repréſente l'état des lignes Halleyennes pour les déclinaiſons orientales, lorsque la diſtance des poles AP & Bp eſt de 30°. Les parties du méridien Ap & PB ſont les lignes, où il n'y a point de déclinaiſon. Enſuite on y voit de part & d'autre les lignes, où la déclinaiſon eſt de 10° & de 20°, qui étant plus petites que 30° vont d'un pole magnétique au pole naturel oppoſé, de A en p & de B en P. Pour la déclinaiſon de 30° les lignes ſe croiſent au milieu, & tant vers le Nord que le Sud on voit les lignes, où la déclinaiſon eſt de 45° & de 90°. Les lignes du même nom ne ſemblent pas être liées enſemble, mais ſe terminer brusquement dans les poles : mais il faut remarquer, qu'elles tiennent enſemble par une ligne où la déclinaiſon eſt $180° + \delta$, ou bien $180° - \delta$ vers l'oüeſt, qui joint ou les poles boreaux ou méridionaux, dans l'autre hemiſphére. Car puisque $\text{tang}(180° + \delta) = \text{tang}\,\delta$, ces deux cas ſont compris dans la même équation. Au reſte on remarque déjà un bel accord entre ces lignes & celles, qu'on voit ſur la Carte de *Halley;* ſurtout pour les grandes déclinaiſons; mais en donnant aux poles magnétiques une autre ſituation, on verra bientôt, qu'il ſera poſſible de parvenir à un accord parfait, autant que l'imperfection des obſervations en eſt ſuſceptible. *SE*

SECONDE SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre étant en deux méridiens oppoſés.

PROBLEME VII.

LIV. *Les deux poles magnétiques de la terre n'étant pas diamètralement oppoſés, déterminer la direction de l'aiguille aimantée pour un lieu quelconque dans la ſurface de la terre.*

SOLUTION.

Soient A & B les deux poles magnétiques de la terre, & L un lieu quelconque, où il faut déterminer la direction de l'aiguille. Or il eſt certain, que la direction magnétique ſe trouve toujours dans un plan qui paſſe par les deux poles magnétiques. Concevons donc une ſection du Globe, qui paſſe par le lieu L & les deux poles magnétiques A & B; & cette ſection ſera un petit cercle dont la tangente en L ſera la direction de l'aiguille Lδ. Cherchons donc d'abord le pole ou le centre de ce petit cercle ſur la ſurface de la terre: pour cet effet diviſons l'arc du grand cercle ACB, qui paſſe par les deux poles magnétiques A & B, en deux parties égales au point C, & par C tirons un grand cercle COc perpendiculaire à ACB, qui ſera l'équateur magnétique, dont chaque point O eſt également éloigné des deux poles magnétiques. Le centre du petit cercle cherché ſera donc quelque part dans cet équateur magnétique en O, d'où les arcs de grands cercles OA & OL ſeront égaux. Poſons la demi-diſtance des poles magnétiques ou l'arc AC $=$ BC $=$ c; & pour le lieu propoſé L, auquel on tire de C l'arc du grand cercle CL, ſoit l'angle ACL $=$ n & l'arc CL $=$ m; ſoit de plus l'arc inconnu CO $=$ ϕ. Donc, tirant l'arc du grand cercle AO, nous aurons cos AO $=$ cos c cos ϕ; or à cet arc AO doit être égal l'arc OL. Mais le triangle ſphérique OCL, Fig. 8.

OCL, où CL $= m$; CO $= \Phi$ & OCL $= 90° - n$ donne

$$\text{cof OL} = \text{cof}\, m\ \text{cof}\, \Phi + \text{fin}\, m\ \text{fin}\, \Phi\ \text{fin}\, n = \text{cof}\, c\ \text{cof}\, \Phi$$

d'où nous tirons $\text{tang}\ \Phi = \dfrac{\text{cof}\, c - \text{cof}\, m}{\text{fin}\, m\ \text{fin}\, n}$.

Or le même triangle OCL donne

$$\text{tang CLO} = \frac{\text{fin}\, \Phi\ \text{cof}\, n}{\text{cof}\, \Phi\ \text{fin}\, m - \text{fin}\, \Phi\ \text{cof}\, m\ \text{fin}\, n}$$

où, ſi nous ſubſtituons pour Φ ſa valeur trouvée, nous aurons :

$$\text{tang CLO} = \frac{\text{cof}\, n\ (\text{cof}\, c - \text{cof}\, m)}{\text{fin}\, m^2\ \text{fin}\, n - \text{cof}\, m\ \text{fin}\, n\ (\text{cof}\, c - \text{cof}\, m)}$$

ou $\text{tang CLO} = \dfrac{\text{cof}\, n\ (\text{cof}\, c - \text{cof}\, m)}{\text{fin}\, n - \text{cof}\, c\ \text{cof}\, m\ \text{fin}\, n}$.

Or la direction magnétique Lδ étant perpendiculaire au rayon du petit cercle, ou à l'arc OL, nous aurons tang CLδ = cot. CLO & partant

$$\text{tang CL}\delta = \frac{\text{fin}\, n\ (1 - \text{cof}\, c\ \text{cof}\, m)}{\text{cof}\, n\ (\text{cof}\, c - \text{cof}\, m)} = \frac{\text{tang}\, n\ (1 - \text{cof}\, c\ \text{cof}\, n)}{\text{cof}\, c - \text{cof}\, m}$$

d'où nous connoiſſons l'angle CLδ que fait la direction magnétique Lδ avec l'arc CL, dont la poſition eſt donnée.

REMARQUE.

LV. La ſolution de ce problème & des ſuivans eſt fondée ſur ce principe, que la direction magnétique ſur la terre ſuit toujours le petit cercle, qui paſſe par le lieu propoſé & les deux poles magnétiques de la terre. On m'accordera bien ce principe à l'égard de la véritable direction magnétique, qui renferme enſemble l'inclinaiſon & la déclinaiſon ; mais, puiſque la déclinaiſon dont il s'agit ici, ſe regle ſur le plan vertical, qui paſſe par la direction magnétique, on en pourroit tirer quantité d'objections, dont la diſcuſſion meneroit trop loin, & ſurpaſſeroit les bornes de notre connoiſſance. Mais on pourra en ſorte fixer les idées, qui entrent ici en conſidération, que ces objections

tions n'y ayent plus de priſe. Si l'on plaçoit là les poles magnétiques de la Terre, où l'axe magnétique traverſe la ſurface de la Terre, on ſeroit ſans doute fort embarraſſé ; puisque la déclinaiſon n'y ſeroit plus indéterminée, à moins que l'axe magnétique ne paſſeroit par le centre de la Terre. Par cette raiſon j'établirai les poles magnétiques de la Terre là, où la véritable direction magnétique eſt verticale, de ſorte que dans ces endroits il ne puiſſe y avoir queſtion de la déclinaiſon ; & ce ſera dans ces points, où toutes les lignes Halleyennes doivent aboutir, de même qu'aux poles naturels de la Terre. Or déterminant en ſorte les poles magnétiques de la terre, ſans s'embarraſſer de l'axe véritable magnétique, les objections mentionnées n'empêcheront plus, qu'on n'accorde le principe établi, c'eſt à dire que partout l'aiguille aimantée ſe dirige ſuivant la tangente du petit cerele tiré ſur la ſurface de la Terre par chaque lieu propoſé, & lesdits poles magnétiques, où l'inclinaiſon devient verticale.

PROBLEME VIII.

LVI. *Les deux poles magnétiques en deux méridiens oppoſés étant donnés, trouver la déclinaiſon magnétique pour un lieu propoſé quelconque* L.

SOLUTION.

Soient A & B les deux poles magnétiques, le boréal A dans le méridien PACp, & le méridional B dans le méridien oppoſé PcBp, à des diſtances inégales des poles naturels P & p, ſavoir: $AP = a$ & $Bp = b$. Qu'on coupe l'are $AB = 180° - a + b$ en deux parties égales en C, & ſoit $AC = BC = 90° - \frac{a+b}{2} = c$; & l'arc $PC = 90° + \frac{a+b}{2} = a + c = d$. Maintenant pour le lieu propoſé L, par lequel paſſe le méridien PLp, ſoit la longitude vers l'oüeſt ou l'angle $CPL = q$, & l'are $PL = p$; donc, ayant dans le triangle ſphérique CPL les côtés $PC = d$, $PL = p$, avec l'angle

compris CPL $= q$, on déterminera les élémens précedens CL $= m$ & l'angle PCL $= n$ en ſorte

$$\text{cof}\, m = \text{cof}\, d\, \text{cof}\, p + \text{ſin}\, d\, \text{ſin}\, p\, \text{cof}\, q \quad \&$$

$$\text{tang}\, n = \frac{\text{ſin}\, p\ \text{ſin}\, q}{\text{ſin}\, d\, \text{cof}\, p - \text{cof}\, d\, \text{ſin}\, p\, \text{cof}\, q}$$

De là, poſant Lδ pour la direction magnétique, on aura

$$\text{tang CL}\delta = \frac{\text{ſin}\, p\, \text{ſin}\, q\ (1 - \text{cof}\, c\, \text{cof}\, d\, \text{cof}\, p - \text{cof}\, c\, \text{ſin}\, d\, \text{ſin}\, p\, \text{cof}\, q)}{(\text{ſin}\, d\, \text{cof}\, p - \text{cof}\, d\, \text{ſin}\, p\, \text{cof}\, q)\,(\text{cof}\, c - \text{cof}\, d\, \text{cof}\, p - \text{ſin}\, d\, \text{ſin}\, p\, \text{cof}\, q)}.$$

Or le même triangle ſphérique CPL fournit

$$\text{tang CLP} = \frac{\text{ſin}\, d\ \text{ſin}\, q}{\text{cof}\, d\ \text{ſin}\, p - \text{ſin}\, d\, \text{cof}\, p\, \text{cof}\, q}$$

duquel angle il faut ſouſtraire l'angle CLδ pour avoir la déclinaiſon magnétique PL$\delta = \delta$ tournée vers l'Eſt. Poſons pour rendre cette opération plus aiſée :

cof d cof p + cof d ſin p cof $q = $ A

ſin d cof p − cof d ſin p cof $q = $ B; cof d ſin p − ſin d cof p cof $q = $ C

& ayant :

$$\text{tang CLR} = \frac{\text{ſin}\, d\, \text{ſin}\, q}{\text{C}}; \quad \text{tang CL}\delta = \frac{\text{ſin}\, p\ \text{ſin}\, q\ (1 - \text{A cof}\, c)}{\text{B}\,(\text{cof}\, c - \text{A})}$$

on en tirera

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\text{cof}\, c\ \text{ſin}\, q\,(\text{B ſin}\, d + \text{AC ſin}\, p) - \text{ſin}\, q\,(\text{AB ſin}\, d + \text{C ſin}\, p)}{\text{cof}\, c\,(\text{BC} - \text{A ſin}\, d\, \text{ſin}\, p\, \text{ſin}\, q^2) + \text{ſin}\, d\, \text{ſin}\, p\, \text{ſin}\, q^2 - \text{ABC}}$$

Mais, en ſubſtituant les valeurs pour A, B, C on trouve

B ſin d + AC ſin $p = (1 - \text{AA})$ cſ p; AB ſin d + C ſin $p = (1 - \text{AA})$ cſ d

BC − A ſin d ſin p ſin $q^2 = -(1 - \text{AA})$ cof q

ſin d ſin p ſin q^2 − ABC $= (1 - \text{AA})$ (ſin d ſin p + cof cof p cof q)

donc, diviſant le haut & le bas par $1 - \text{AA}$, on obtiendra :

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\text{cof}\, c\ \text{cof}\, p\ \text{ſin}\, q - \text{cof}\, d\ \text{ſin}\, q}{-\text{cof}\, c\, \text{cof}\, q + \text{ſin}\, d\ \text{ſin}\, p + \text{cof}\, d\, \text{cof}\, p\, \text{cof}\, q}.$$

co-

COROLL. 1.

LVII. Puisque $c = 90° - \frac{a+b}{2}$ & $d = 90° + \frac{a+b}{2}$: la formule trouvée prendra cette forme :

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\left(\text{sin}\,\frac{a-b}{2}\,\text{cos}\,p + \text{sin}\,\frac{a+b}{2}\right)\text{sin}\,q}{\text{cos}\,\frac{a+b}{2}\,\text{sin}\,p - \text{sin}\,\frac{a+b}{2}\,\text{cos}\,p\,\text{cos}\,q - \text{sin}\,\frac{a-b}{2}\,\text{cos}\,q}$$

où je remarque que le numérateur eſt toujours poſitif pour l'hemiſphere ſupérieur que nous avons en vûe, où ſin q eſt poſitif: & quand même on prend $\text{cos}\,p = -1$, l'autre facteur $\text{sin}\,\frac{a-b}{2}\,\text{cos}\,p + \text{sin}\,\frac{a+b}{2}$ demeure pourtant poſitif.

COROLL. 2.

LVIII. De là il s'enſuit que par tout cet hemiſphere ſupérieur la déclinaiſon eſt poſitive, ou dirigée vers l'eſt ; car, quoique le dénominateur devienne négatif, l'angle δ ne devient pas pour cela négatif, mais ſeulement plus grand que 90°.

COROLL. 3.

LIX. La raiſon en eſt, que le dénominateur ne ſauroit devenir négatif ſans paſſer par zero : or dans ce cas il marque un angle droit, & partant s'il devient négatif, la tangente négative de δ ne ſauroit ſubitement indiquer un angle négatif. Mais l'autre ſignification d'un angle obtus aura uniquement lieu.

COROLL. 4.

LX. Pour l'autre hemiſphere il y en a de même, à l'égard des déclinaiſons occidentales, qui y auront uniquement lieu ; comme dans le cas précédent, où les poles magnétiques étoient diamètralement oppoſés. D'où l'on comprend qu'il n'y a d'autre ligne ſans déclinaiſon, que les deux méridiens oppoſés, qui paſſent par les poles magnétiques.

REMARQUE.

LXI. Par rapport à la réduction de l'expreſſion, que nous avons dabord trouvée pour tang δ, on évitera des calculs fort ennuyans, quand on ſait faire uſage de la rélation, que les trois lettres A, B, C ont entr'elles. Dabord il faut remarquer que

$$1 - AA = \sin p^2 \sin q^2 + BB = \sin d^2 \sin q^2 + CC$$

enſuite leur comparaiſon fournit ces formules,

$B \sin d + A \cos d = \cos p$; $C \sin p + A \cos p = \cos d$

$A \sin d - B \cos d = \sin q$; $A \sin p - C \cos p = \sin d \cos q$

$C + B \cos q = \cos q^2$; $B + C \cos q = \sin d \cos p \sin q^2$.

Pour en faire uſage prenons la derniere formule,

$\sin d \sin p \sin q^2 - ABC$, qui à cauſe de $C = \cos d \sin p \sin q^2 - B \cos q$ ſe change en

$$\sin d \sin p \sin q^2 - AB \cos d \sin p \sin q^2 + ABB \cos q$$

Mais $BB = 1 - AA - \sin p^2 \sin q^2$ donne

$$\sin d \sin p \sin q^2 - AB \cos d \sin p \sin q^2 + A(1 - AA) \cos q - A \sin p^2 \sin q^2 \cos q$$

Or $- B \cos d = \sin p \cos q - A \sin d$ produit

$$\sin d \sin p \sin q^2 + A \sin p^2 \sin p^2 \cos q - AA \sin d \sin p \cos q^2 + A(1 - AA) \cos q - A \sin p^2 \sin q^2 \cos q,$$

ou $(1 - AA) \sin d \sin p \sin q^2 + A(1 - AA) \cos q$, le reſte eſt évident. Ce même artifice ſera d'une grande utilité dans la ſuite.

PROBLEME IX.

LXII. *Trouver les lignes Halleyennes, qui paſſent par tous les lieux de la terre, où la déclinaiſon de la bouſſole eſt d'une quantité donnée.*

SOLUTION.

Soit δ la déclinaiſon propoſée, qui étant poſitive ſera dirigée vers l'Eſt, mais vers l'oüeſt, ſi elle eſt négative. Par la poſition des po-

poles magnétiques les quantités c & d ſeront données, & ſi L eſt un lieu, par où paſſe la ligne cherchée, il s'agit de trouver une équation entre $PL = p$ & $CPL = q$. Or l'équation trouvée dans le problème précédent fournit celle-cy

$$\text{tang}\,\delta \,\text{ſin}\,d \,\text{ſin}\,p + (\text{tang}\,\delta \,\text{cof}\,d \,\text{cof}\,q - \text{cof}\,c \,\text{ſin}\,q)\,\text{cof}\,p = \text{tang}\,\delta \,\text{cof}\,c \,\text{cof}\,q - \text{cof}\,d \,\text{ſin}\,q,$$

au lieu de laquelle je conſidérerai cette forme générale

$$A \,\text{ſin}\,p + (B \,\text{cof}\,q - C \,\text{ſin}\,q)\,\text{cof}\,p = D \,\text{cof}\,q - E \,\text{ſin}\,q$$

de ſorte que pour le cas préſent,

$$A = \text{tang}\,\delta \,\text{ſin}\,d\,; \quad B = \text{tang}\,\delta \,\text{cof}\,d\,; \quad C = \text{cof}\,c$$
$$D = \text{tang}\,\delta \,\text{cof}\,c\,; \quad E = \text{cof}\,d$$

Maintenant, pour trouver la valeur de p pour chaque angle donné q, je commence par chercher un angle r de ſorte que

$$\text{tang}\,r = \frac{A}{B \,\text{cof}\,q - C \,\text{ſin}\,q}$$ & j'aurai $$\frac{A \,\text{cof}(r-p)}{\text{ſin}\,r} = D \,\text{cof}\,q - E \,\text{ſin}\,q.$$

Qu'on cherche enſuite deux angles m & n de ſorte que

$$\text{tang}\,m = \frac{B}{C} \quad \& \quad \text{tang}\,n = \frac{D}{E} \quad \& \text{ on aura :}$$

$$\text{tang}\,r = \frac{A \,\text{cof}\,m}{C \,\text{ſin}\,(m-q)} = \frac{A \,\text{ſin}\,m}{B \,\text{ſin}\,(m-q)}$$

$$\frac{A \,\text{cof}\,r-p)}{\text{ſin}\,r} = \frac{E \,\text{ſin}\,(n-q)}{\text{cof}\,n} = \frac{D \,\text{ſin}\,(n-q)}{\text{ſin}\,n}.$$

Cela poſé, en ſubſtituant pour les lettres A, B, C, D, E, leurs valeurs, on fera les opérations ſuivantes :

$$\text{tang}\,m = \frac{\text{tang}\,\delta \,\text{cof}\,d}{\text{cof}\,c}\,; \quad \text{tang}\,n = \frac{\text{tang}\,d \,\text{cof}\,c}{\text{cof}\,d}$$

$$\text{tang}\,r = \frac{\text{tang}\,d \,\text{ſin}\,m}{\text{ſin}\,(m-q)}\,; \quad \text{cof}(r-p) = \frac{\text{cof}\,c \,\text{ſin}\,(n-q)\,\text{ſin}\,r}{\text{ſin}\,d \,\text{ſin}\,n}.$$

Ces formules étant fort propres pour le calcul trigonométrique, on trouvera aiſément r & $r - p$; car ſuppoſons qu'on trouve $\text{cof}(r-p) = \text{cof}\, s$, à cauſe de $r-p = \pm s$, les deux valeurs de p ſeront $p = r \pm s$.

COROLL. 1.

LXIII. En chaque méridien donc il y a deux points par où chaque ligne Halleyenne paſſe, à moins que ces deux points ne ſe réuniſſent dans un ſeul, ou qu'ils ne deviennent imaginaires. Le premier arrive ſi l'expreſſion $\frac{\text{cof}\, c \ \text{ſin}(n-q)\ \text{ſin}\, r}{\text{ſin}\, d\ \text{ſin}\, n}$ devient égale à l'unité, & l'autre ſi elle ſurpaſſe l'unité.

COROLL. 2.

LXIV. Concevons qu'on tire par C un grand cercle CO, qui coupe le méridien PLp en ſorte en O, qu'il devienne $\text{PO} = r$; & partant $\text{OL} = r - p$: & ayant dans le triangle CPO les côtés $\text{CP} = d$; $\text{PO} = r$ & $\text{CPO} = q$, à cauſe de $\text{tang}\, r = \frac{\text{ſin}\, d\ \text{ſin}\, m}{\text{cof}\, d\ \text{ſin}(m-q)}$ on trouve

$$\text{tang PCO} = \frac{\text{ſin}\, m\ \text{ſin}\, q}{\text{cof}\, d\ \text{ſin}(m-q) - \text{cof}\, d\ \text{ſin}\, m\ \text{cof}\, q} = -\frac{\text{tang}\, m}{\text{cof}\, d}$$

de ſorte que, puiſque $\text{tang}\, m = \frac{\text{tang}\, \delta\ \text{cof}\, d}{\text{cof}\, c}$, on aura

$$\text{tang PCO} = -\frac{\text{tang}\, \delta}{\text{cof}\, c} \quad \text{ou} \quad \text{tang}\, p\text{CO} = \frac{\text{tang}\, \delta}{\text{cof}\, c}.$$

COROLL. 3.

LXV. Il eſt donc remarquable que la poſition du grand cercle CO ne dépend pas de l'angle $\text{CPO} = q$ & qu'elle a lieu pour tous les méridiens. Et puiſque l'arc $\text{OL} = r - p$, eſt tant négatif que poſitif, ce grand cercle CO ſera le diamètre des lignes Halleyennes pour la même déclinaiſon magnétique δ.

co-

COROLL. 4.

LXVI. Puisque $AC = c$, si nous tirons de A un grand cercle AE, qui fasse avec CA un angle $CAE = \delta$, on trouvera l'arc AE égal à un quart de cercle. Donc, pour construire le cercle diamétral CO, on n'a qu'à appliquer en A un quart de cercle AE sous un angle $CAE = \delta$, & les deux points C, E détermineront ce cercle.

COROLL. 5.

LXVII. Si nous posons $q = 0$, nous aurons $r = d$ & $r - p = c$ donc $p = d \pm c$. Mais, ayant posé $c = 90° - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ & $p = 90° + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, ces deux valeurs de p sont a & $180° + b$, qui marquent les deux poles magnétiques, auxquels toutes les lignes Halleyennes aboutissent.

1. REMARQUE.

LXVIII. Par la premiere équation on voit, que prenant la déclinaison δ négative, ou occidentale, l'équation demeure la même, pourvu qu'on prenne aussi l'angle q négatif. Dans ce cas les lignes Halleyennes tomberont dans l'autre hemisphére, & seront tout à fait semblables à celles du supérieur: il suffit donc d'avoir calculé ces lignes pour un hemisphére.

2. REMARQUE.

LXIX. Les formules que nous avons données pour l'usage du calcul, ne sont pas applicables au cas, où la déclinaison doit évanouir, puisque alors l'angle q évanouit nécessairement: la ligne sans déclinaison étant l'un & l'autre méridien, qui passent par les poles magnétiques. Or, si la déclinaison est très petite, l'angle q ne sauroit surpasser une certaine grandeur: pour la trouver, soit la déclinaison δ & l'angle q extrêmement petit, & à cause de $m = \frac{\delta \cos d}{\cos c}$ & $n = \frac{\delta \cos c}{\cos d}$:

nous aurons $\operatorname{tang} r = \frac{\delta \sin d}{\delta \cos d - q \cos c}$ & ensuite

$$\cos(r - p) = \frac{\delta \cos - q \cos d}{\sqrt{(\delta\delta - 2\delta q \cos c \cos d + qq \cos c^2)}}$$

où

où la plus grande valeur, dont q eſt ſusceptible, eſt $\sin q = \frac{\delta \sin c}{\sqrt{(\sin c^2 - \sin d^2)}} = \frac{\delta \cos \frac{1}{2}(a - b)}{\sqrt{\sin a \sin b}}$, d'où l'on voit, combien les lignes Halleyennes pour les très petites déclinaiſons s'éloignent des méridiens PAp & PBp. Mais il eſt clair en même tems, que ces lignes s'avancent d'autant plus vers le milieu de l'hemiſphére, plus la déclinaiſon croit, & qu'il y en aura une, comme dans le cas précédent, dont les branches ſe coupent mutuellement, & qui fera la limite entre les petites & les grandes déclinaiſons.

PROBLEME X.

LXX. *Trouver la déclinaiſon δ, dont la ligne Halleyenne eſt compoſée des branches, qui ſe coupent mutuellements.*

SOLUTION.

A l'endroit où les deux branches ſe coupent, l'arc du méridien PL qui paſſe par cet endroit, aura deux valeurs égales. Donc, dans la ſolution du problême précédent, l'expreſſion $\frac{\cos c \sin (n - q) \sin r}{\sin d \sin n}$, ſera égale à l'unité, priſe poſitivement ou négativement. Or, afin que cette expreſſion ne devienne pas plus grande que l'unité, il faut que l'unité ſoit la plus grande valeur. Voilà donc à quoi revient la ſolution du problème : Il faut que l'expreſſion $\frac{\cos c \sin (n - q) \sin r}{\sin \cdot \sin n}$ ſoit égale à l'unité, & que ſon différentiel ſoit en même tems $= 0$. Mais, tant pour la facilité du calcul, que pour rendre notre recherche plus générale, je me tiendrai aux formules plus générales

$$\text{tang } r = \frac{A}{B \cos q - C \sin q} \quad \& \quad \cos (r - p) = \frac{(D \cos q - E \sin q) \sin r}{A}$$

& il faut qu'il ſoit

premierement $(D \cos q - E \sin q) \sin r = \pm A$

& enſuite $dr \cos r (D \cos q - E \sin q) = dq \sin r (D \sin q + E \cos q)$.

Or

Or le différentiel logarithmique de l'équation $\text{tang } r = \frac{A}{B\cos q - C\sin q}$

donne $\frac{dr}{\sin r \cos r} = \frac{dq(B\sin q + \cos q)}{B\cos q - \sin q}$: d'où nous tirons :

$$\cos r^2 = \frac{(B\cos q - C\sin q)(D\sin q + E\cos q)}{(B\sin q + C\cos q)(D\cos q - E\sin q)}$$

& partant $\sin r^2 = \frac{CD - BE}{(B\sin q + C\cos q)(D\cos q - E\sin q)}$

d'où la valeur de tang r fournit $\frac{AA}{CD - BE} = \frac{B\cos q - C\sin q}{D\sin q + E\cos q}$,

& la premiere égalité : $\frac{AA}{CD - BE} = \frac{D\cos q - E\sin q}{B\sin q + C\cos q}$.

Posons pour abréger $\frac{AA}{CD - BE} = M$, & nous trouverons

$$\text{tang } q = \frac{D - MC}{E + MB} = \frac{B - ME}{C + MD}, \text{ & partant}$$

$$(1 - MM)(CD - BE) = M(BB + CC - DD - EE)$$

ou bien

$$A^4 + AA(BB + CC - DD - EE) = (CD - BE)^2.$$

Maintenant, si nous substituons les valeurs du problème précédent, on aura

$$BB + CC - DD - EE = -(1 - \text{tang } \delta^2)(\cos d^2 - \cos c^2)$$

$$CD - BE = -\text{tang } \delta(\cos d^2 - \cos c^2) \quad \& \quad A = \text{tang } \delta \sin d,$$

& de là on tirera enfin

$$\text{tang } \delta = \frac{\sqrt{(\cos d^2 - \cos c^2)}}{\sin d} = \frac{\sqrt{\sin a \sin b}}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}, \text{ ou } \cos \delta = \frac{\sin d}{\sin c},$$

à cause de $\cos d = -\sin \frac{1}{2}(a+b)$ & $\cos c = \sin \frac{1}{2}(a-b)$.

Enſuite, pour le lieu de l'interſection, on aura à cauſe de

$M = -\frac{\text{tang}\,\delta \sin d^2}{\cos d^2 - \cos c^2} = -\frac{1}{\text{tang}\,\delta}$, & $E + MB = 0$, l'angle

$q = 90°$; & $\sin r^2 = \frac{BE - CD}{BE} = \frac{\cos d^2 - \cos c^2}{\cos d^2}$; & $\cos r = \frac{\cos c}{\cos d}$

donc $\cos(r-p) = -\frac{E}{A}\sin r = 1$, & puisque $p = r$, on aura

$$\sin p = \frac{\sqrt{(\cos d^2 - \cos c^2)}}{\cos d} = -\text{tang}\,\delta\,\text{tang}\,d = \frac{\text{tang}\,\delta\,\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sin a \sin b}}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}; \quad \text{ou} \quad \cos p = -\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)};$$

ayant déjà trouvé $q = 90°$.

COROLL. 1.

LXXI. Puisque $\frac{B\cos q - C\sin q}{D\sin q + E\cos q} = \frac{D\cos q - E\sin q}{B\sin q + C\cos q}$,

cette équation donne d'abord la tangente de $2q$ ſavoir

$$\text{tang}\,2q = \frac{2(BC - DE)}{-BB + CC + DD - EE},$$

& puisque dans notre cas $BC = DE$, on en conclud d'abord $2q = 180°$ & $q = 90°$. Donc, $E + MB = 0$, ou

$C + MD = 0$, & partant $M = -\frac{C}{D}$, ou

$\frac{\text{tang}\,\delta \sin d^2}{\cos d^2 - \cos c^2} = \frac{1}{\text{tang}\,\delta}$, c'eſt à dire $\text{tang}\,\delta = \frac{\sqrt{(\cos d^2 - \cos c^2)}}{\sin d}$

comme auparavant.

COROLL. 2.

LXXII. Or la même valeur de tangente $2q$ donne

$$\sin 2q = \frac{2(BC - DE)}{\sqrt{[4(BC - DE)^2 + (BB - CC - DD + EE)^2]}}$$

&

& enſuite ayant

$$2AA+BB+CC-DD-EE = \sqrt{\{4(CD-BE)^2+(BB+CC-DD-EE)^2\}};$$

l'égalité des ſignes radicaux fournit

$$2AA+BB+CC-DD-EE = \frac{2(BC-DE)}{\text{ſin } 2q}, \quad \text{ou bien}$$

$$2AA+BB+CC-DD-EE = -\frac{BB+CC+DD-EE}{\text{coſ } 2q}$$

donc $\quad \text{tang } q^2 = \dfrac{AA+BB-DD}{AA+CC-EE}.$

COROLL. 3.

LXXIII. Pour notre cas nous aurons donc :

$$\text{tang } q^2 = \frac{\text{tang } \delta^2 \text{ ſin } d^2}{\text{tang } \delta^2 \text{ ſin } d^2 - \text{coſ } d^2 + \text{coſ } c^2},$$

& puiſque $\text{tang } 2q = 0$, & partant $q = 90$, nous en concluons d'abord

$$\text{tang } \delta^2 \text{ ſin } d^2 = \text{coſ } d^2 - \text{coſ } c^2, \quad \text{ou} \quad \text{tang } \delta = \frac{\sqrt{(\text{coſ } d^2 - \text{coſ } c^2)}}{\text{ſin } d},$$

ou bien $\quad \text{tang } \delta = \dfrac{\sqrt{\text{ſin } a \text{ ſin } b}}{\text{coſ } \frac{1}{2}(a+b)}$

COROLL. 4.

LXXIV. Le ſigne radical marque tant une valeur poſitive que négative pour la déclinaiſon δ: de ſorte que ſi δ donne une interſection dans la ligne Halleyenne, la déclinaiſon $-\delta$ en donnera auſſi une, qui ſera toujours dans un méridien perpendiculaire à ceux qui paſſent par les poles magnétiques.

COROLL. 5.

LXXV. Si $Bp = AP$ ou $b = a$, la déclinaiſon $\delta = \pm a$ donnera une ligne à interſection, & pour l'interſection on aura $q = 90°$, & $p = 90°$. Mais, ſi $b = 0$, ou ſi un pole magnétique étoit dans

un pole naturel de la Terre, on auroit $\delta = 0$, & $p = 0$: l'interſection ſeroit alors dans ce pole de la Terre, pour une déclinaiſon infiniment petite.

1. REMARQUE.

LXXVI. Examinons plus ſoigneuſement le cas, où l'intervalle $Bp = b$ évanouït, & puiſque alors $c = 90° - \frac{1}{2}a$ & $d = 90° + \frac{1}{2}a$, pour trouver les lignes Halleyennes nous aurons d'abord $\text{tang } m = \text{tang } n = -\text{tang } \delta$. Soit donc $m = n = -\delta$, & nous trouverons

$$\text{tang } r = -\frac{\text{ſin } \delta}{\text{tang } \frac{1}{2}a \text{ ſin } (\delta + q)} \quad \& \quad \text{coſ}(r - p) = -\text{coſ} r$$

donc $r - p = \pm(180° - r)$ de ſorte que

$$p = 180° \quad \text{ou} \quad p = 2r - 180°$$

Chaque méridien n'eſt donc coupé que dans un point, l'autre ſe perdant dans le pole p. Or, pour trouver plus commodément l'autre point, poſons $a = 90° + t$, & il faudra chercher l'angle t de ſorte que $\text{tang } t = \frac{\text{tang } \frac{1}{2}a \text{ ſin } (\delta + q)}{\text{ſin } \delta}$, & alors on aura $p = 2t$. Si $q = 0$, on a $t = \frac{1}{2}a$: d'où l'on voit que toutes les lignes Halleyennes ſortent du pole A, & qu'elles rentrent dans l'autre pole P.

2. REMARQUE.

LXXVII. Dans la ſuppoſition que le pole méridional magnétique ſoit réuni avec le pole antarctique p, j'ai poſé la diſtance $AP = 30°$, & la figure 10 répréſente les lignes Halleyennes pour les déclinaiſons de 5°, 10°, 15° &c. qui ſont toutes ſemblables à celles, que nous avons trouvées dans la premiere ſection pour les grandes déclinaiſons. Toutes ces courbes, à ce qu'on voit, aboutiſſent aux poles P & A, & n'entrent nulle part dans le pole B, quoique ce point ſelon le calcul appartienne à chacune de ces lignes. En conſtruiſant ces lignes on s'apperçoit dabord, qu'elles contiennent des branches ſemblables, & qu'un grand cercle perpendiculaire à PAB, & tiré par

Fig. 10.

le

le milieu de l'intervalle AP, en ſeroit le diamètre. Or, ſi nous rapportons les lignes Halleyennes à ce diamètre, on verra bientôt, qu'elles ſont toutes de petits cercles, qui paſſent par les deux poles A & P. Soit R le rayon d'un de ces petits cercles pour la déclinaiſon δ, prenant pour R l'arc du grand cercle, qui en repréſente le rayon dans la ſurface de la ſphére, & on trouve $\text{cof R} = \text{cof } \frac{1}{2} a \text{ cof } \omega$, prenant $\text{tang } \omega = \frac{\text{ſin } \frac{1}{2} a}{\text{tang } \delta}$, ou bien on aura $\text{tang R} = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} a}{\text{ſin } \delta}$. La démonſtration de ces formules peut conduire à de fort beaux Théoremes de la Trigonométrie ſphérique, mais ce cas eſt trop particulier, pour que je m'y arrête.

PROBLEME XI.

LXXVIII. *Déterminer plus exactement la figure des lignes Halleyennes, lorsque les poles magnétiques ne ſont pas diamétralement oppoſés, mais qu'ils ſe trouvent pourtant en des méridiens oppoſés.*

SOLUTION.

Ayant diſtribué cy-deſſus les lignes Halleyennes en trois ordres, dont le premier contient les lignes, qui vont d'un pole magnétique au pole naturel qui lui eſt contraire; & le troiſième celles, qui vont d'un pole magnétique au pole naturel, qui lui eſt le plus proche. Entre ces deux ordres le ſecond eſt quaſi la limite, & ne renferme qu'une ſeule ligne, compoſée de deux branches, qui ſe croiſent quelque part, & forment un point d'interſection, comme on peut voir dans la ſeptième figure. Ces trois ordres ont lieu dans tous les cas; quoiqu'il puiſſe arriver quelquefois, qu'un ou deux évanouiſſent ou ſe confondent enſemble, comme nous venons de voir dans le cas, où un pole magnétique tomboit dans un pole naturel: car, puisque la ligne du ſecond ordre répondoit à une déclinaiſon infiniment petite, tant elle que le premier ordre tout entier ſe confondoit avec la ligne ſans déclinaiſon, & toutes les déclinaiſons donnoient des lignes du troiſième

ordre. Mais, ſi aucune des diſtances $AP = a$ & $Bp = b$ n'évanouït, les trois ordres ſeront diſtingués, & pour les bien connoitre, on n'a qu'à déterminer la ligne du ſecond ordre, qui répond à la déclinaiſon δ, en ſorte que

$$\text{tang } \delta = \frac{\sqrt{(\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2)}}{\text{ſin } d} = \frac{\sqrt{\text{ſin } a \text{ ſin } b}}{\text{cof } \frac{1}{2}(a+b)}$$

d'où l'on tire

$$\text{ſin } \delta = \frac{\sqrt{(\text{cof } d^2 - \text{cof } c^2)}}{\text{ſin } c} \quad \& \quad \text{cof } \delta = \frac{\text{ſin } d}{\text{ſin } c} = \frac{\text{cof } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{cof } \frac{1}{2}(a-b)}$$

cette derniere expreſſion rationelle eſt la plus commode pour en tirer la déclinaiſon δ requiſe pour la ligne du ſecond ordre ; qui marque auſſi tant $+\delta$ pour la déclinaiſon orientale que $-\delta$ pour l'occidentale. Enſuite nous avons vu que le point d'interſection tombe dans le méridien, où $q = 90°$, & ſa diſtance du pole boréal P ſera l'arc PL, en ſorte que $\text{cof P L} = \frac{\text{cof } c}{\text{cof } d} = -\frac{\text{ſin } \frac{1}{2}(a-b)}{\text{ſin } \frac{1}{2}(a+b)}$. De là on voit que, ſi $a > b$, ou $AP > Bp$, cette interſection tombe vers le ſud, & ſi $AP < Bp$ vers le nord.

Après avoir déterminé cette ligne, dont une branche paſſe d'un pole magnétique à l'autre, & l'autre branche d'un pole naturel à l'autre, les moindres déclinaiſons donneront des lignes du premier ordre, & les plus grandes des lignes du troiſiéme ordre : qu'on conſtruira par les formules du §. LXII.

EXEMPLE.

LXXIX. Soit la diſtance des poles au nord $AP = 10°$, & au ſud $Bp = 20°$: ayant donc $a = 10$, & $b = 20$, on aura $c = 90 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 95°$, & $d = 90 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = 105°$.

De là pour la ligne du ſecond ordre on trouvera la déclinaiſon $\delta = 14°, 9', 36\frac{2}{3}''$. Soit cette déclinaiſon orientale, & cherchons dans tous les méridiens de 10° à 10° les points, par où cette ligne paſſera :

q	*r*	*s*	PL	P*l*
0′	105°, 0′	95°, 0′	10°, 0′	200°, 0′
10	101 , 24	84 , 37	16 , 47	186 , 1
20	97 , 22	73 , 58	23 , 24	171 , 20
30	93 , 3	63 , 7	29 , 56	156 , 10
40	88 , 35	52 , 10	36 , 25	140 , 45
50	84 , 11	41 , 16	42 , 55	125 , 27
60	80 , 1	30 , 31	49 , 30	110 , 32
70	76 , 16	20 , 1	56 , 15	96 , 17
80	73 , 0	9 , 52	63 , 8	82 , 52
90	70 , 19	0 , 0	70 , 19	70 , 19
100	68 , 15	9 , 36	77 , 51	58 , 39
110	66 , 50	18 , 56	85 , 46	47 , 54
120	66 , 4	28 , 8	94 , 12	37 , 56
130	65 , 57	37 , 16	103 , 13	28 , 41
140	66 , 29	46 , 26	112 , 55	20 , 3
150	67 , 40	55 , 54	123 , 34	11 , 46
160	69 , 29	65 , 12	134 , 41	4 , 17
170	71 , 57	74 , 57	146 , 54	- 3 , 0
180	75 , 0	85 , 0	160 , 0	- 10 , 0

Cette ligne eſt repréſentée dans la figure 11me, où l'on voit outre les lignes ſans déclinaiſon, les lignes pour la déclinaiſon de 5° & 10° du premier ordre, & du troiſième ordre, on voit les lignes de 20° & 25° de déclinaiſon. De là on jugera aiſément, quelle doit être la figure de ces lignes dans tout autre cas, où les poles magnéques ſe trouvent en deux méridiens oppoſés, quelles que ſoient leurs diſtances aux poles naturels de la Terre. Fig. 11.

TROI-

TROISIÈME SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre ſe trouvant dans le même méridien.

PROBLEME XII.

Fig. 11. LXXX. *Les deux poles magnétiques* A & B *étant ſitués dans un même méridien* P C p, *déterminer la déclinaiſon magnétique pour chaque lieu propoſé de la terre* L.

SOLUTION.

Soit la diſtance du pole magnétique boréal A au pole arctique $AP = a$, & la diſtance du pole méridional B au pole antarctique $Bp = b$. La diſtance des poles magnétiques $AB = 180° - a - b$ ſoit partagée au milieu C; ſoit la moitié $CA = CB = 90 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b = c$, & l'arc du méridien $CP = d = 90° + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. Qu'on tire par le lieu propoſé de la Terre L le méridien PLp, & ſoit la longitude $APL = q$, comptant cet angle depuis le méridien P Cp vers l'occident, & la diſtance au pole arctique $PL = p$; enfin ſoit δ la déclinaiſon de la bouſſole en L, laquelle étant poſitive ſoit orientale, de ſorte qu'une valeur négative trouvée pour δ marque une déclinaiſon occidentale. Cela poſé, tout le raiſonnement demeurant le même, comme dans la ſection précédente, puisque la différence ſe trouve uniquement dans les quantités c & d, entant qu'elles dépendent des diſtances a & b, on trouvera comme cy-deſſus la déclinaiſon magnétique exprimée en ſorte

$$\text{tang}\,\delta = \frac{(\cos c \cos p - \cos d)\sin q}{-\cos c \cos q + \sin d \sin p + \cos d \cos p \cos q},$$ où

$\cos c = \sin \frac{1}{2}(a+b)$, $\cos d = \sin \frac{1}{2}(b-a)$ & $\sin d = \cos \frac{1}{2}(b-a)$. Donc, en ſubſtituant ces valeurs, nous aurons

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\left[\sin \frac{1}{2}(a+b)\cos p - \sin \frac{1}{2}(b-a)\right]\sin q}{-\sin \frac{1}{2}(a+b)\cos q + \cos \frac{1}{2}(b-a)\sin p + \sin \frac{1}{2}(b-a)\cos p \cos q}.$$

co-

COROLL. 1.

LXXXI. Par tout l'hemiſphere que la figure repréſente, que je nommerai le ſupérieur, tant ſin q que ſin p ont partout des valeurs poſitives ; mais ſi q & p ſurpaſſent 90°, leurs coſinus deviennent négatifs. D'où l'on voit que le numérateur ne demeure pas toujours poſitif, comme dans la ſection précédente.

COROLL. 2.

LXXXII. Quand l'arc p eſt pris ſi grand, que $\text{coſ}\, p = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(b+a)}$ la déclinaiſon δ évanouit, & ſi l'on augmente au delà l'arc PL $= p$, la déclinaiſon deviendra ſur ce même hemiſphere négative ou occidentale. Et par la même raiſon les deux eſpeces de déclinaiſon auront auſſi lieu ſur l'autre hemiſphere.

COROLL. 3.

LXXXIII. Car, puiſque l'équation demeure inaltérée quoiqu'on prenne δ & q négatifs, la déclinaiſon ſur l'hemiſphere inférieur ſuivra la même loi que ſur le ſupérieur, pourvu qu'on change le titre.

COROLL. 4.

LXXXIV. Si les deux diſtances AP & Bp ſont égales $a = b$; notre expreſſion deviendra $\text{tang}\, \delta = \frac{\sin a \,\text{coſ}\, p \sin q}{-\sin a \,\text{coſ}\, q + \sin p}$. Donc, ſi $p = 90°$, c'eſt à dire partout ſous l'équateur, la déclinaiſon magnétique ſera $= 0$. Or ſi $p = 0$, on aura $\text{tang}\, \delta = -\text{tang}\, q$, ou $\delta = 180 - q$; dans l'autre pole ou $p = 180°$, ayant $\text{tang}\, \delta = \frac{-\sin q}{-\text{coſ}\, q}$, à cauſe du numérateur & dénominateur négatif, on aura $\delta = 180° + q$.

COROLL. 5.

LXXXV. Ces deux dernieres concluſions ont auſſi lieu en général, d'où l'on voit que ſur l'hemiſphere ſupérieur proche du pole boréal P la déclinaiſon ſera $\delta = 180° - q$, & partant orientale ;

mais proche du pole antarctique p, la valeur $\delta = 180° + q$ indique une déclinaiſon occidentale.

REMARQUE.

LXXXVI. Voilà donc déjà une grande différence entre le cas de cette ſection & celui de la précédente. Car auparavant la déclinaiſon étoit par tout l'hemiſphere ſupérieur orientale, & ſur l'autre hemiſphere partout occidentale, de ſorte que ſous chaque méridien elle fut partout de la même eſpece. Mais dans le cas préſent nous voyons, que ſur le même hemiſphere les deux eſpeces ont lieu, de ſorte que ſous un même méridien l'aiguille décline tant vers l'eſt que vers l'oüeſt. Par là eſt renverſé le fondement, ſur lequel M. *Halley* avoit établi ſon ſyſtème de quatre poles magnétiques, croyant que s'il n'y en avoit que deux, il ſeroit impoſſible, que les deux eſpeces de déclinaiſon régnaſſent ſous un même méridien, ce qui ſera mis dans un plus grand jour par les recherches ſuivantes.

PROBLEME XIII.

LXXXVII. *Les deux poles magnétiques* A *&* B *étant placés dans un même méridien* PCp, *trouver les lignes Halleyennes, qui paſſent par tous les endroits, où il n'y a point du tout de déclinaiſon.*

SOLUTION.

Ayant poſé comme auparavant les diſtances $AP = a$ & $Bp = b$, puiſque pour un lieu quelconque L déterminé par l'angle $CPL = q$ & l'arc $PL = p$, la déclinaiſon δ eſt exprimée en ſorte

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\left[\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos p - \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\right]\sin q}{-\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos q + \cos\tfrac{1}{2}(b-a)\sin p + \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\cos p\cos q},$$

on voit que la déclinaiſon δ évanouit en deux cas, l'un où $\sin q = 0$, & l'autre où $\cos p = \frac{\sin\frac{1}{2}(b-a)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}$; le premier donne ou $q = 0$, ou $q = 180°$, & partant la déclinaiſon ſera nulle, tant ſous le méridien PCp qui paſſe par les deux poles magnétiques A & B, que ſous le méridien Pcp qui lui eſt oppoſé.

Mais

Mais, puisque l'autre équation $\text{cof}\,p = \frac{\text{fin}\,\frac{1}{2}(b-a)}{\text{fin}\,\frac{1}{2}(a+b)}$ eſt auſſi poſſible, il y a outre ces deux méridiens encore d'autres endroits, où la déclinaiſon évanouit également ; & il eſt évident, que tous ces lieux ſont ſitués dans un cercle parallele à l'équateur, dont le ſinus de latitude eſt $= \frac{\text{fin}\,\frac{1}{2}(b-a)}{\text{fin}\,\frac{1}{2}(a+b)}$. La latitude de ce parallele ſera donc boréale ſi $b > a$, ou ſi l'intervalle méridional Bp eſt plus grand que le boréal AP ; & elle ſera méridionale, ſi $AP > Bp$. Si ces deux intervalles étoient égaux, ce ſeroit partout ſous l'équateur même, que l'aiguille n'eut point de déclinaiſon.

COROLL. 1.

LXXXVIII. Dans ce cas donc, où les deux poles magnétiques A & B ſe trouvent dans le même méridien PCp, il y a outre les deux méridiens PCp & Pcp encore un cercle parallele MKN, où la déclinaiſon eſt nulle, ce qui produit une différence bien remarquable entre ce cas, & celui que j'ai conſidéré dans la ſection précédente. Fig. 15.

COROLL. 2.

LXXXIX. Pour déterminer ce parallele MKN, ſa diſtance au pole arctique P, ou l'arc PM, eſt tel que $\text{cof}\,PM = \frac{\text{cof}\,d}{\text{cof}\,c} = \frac{\text{cof}\,CP}{\text{cof}\,CA}$: d'où l'on déduit cette conſtruction. Du point C comme centre avec l'intervalle CA qu'on décrive ſur la ſphére le petit cercle AKB, & qu'on tire un méridien PK, qui le touche en K, alors le parallele cherché MKN paſſera par le point K.

COROLL. 3.

XC. Par ce parallele MKN, & les deux méridiens PCp & Pcp, la ſurface de la Terre eſt en ſorte partagée en quatre parties, que ſur l'hemiſphére ſupérieur, la déclinaiſon eſt orientale dans la partie boréale, & occidentale dans la partie méridionale. Or au contraire ſur l'autre hemiſphére la déclinaiſon eſt occidentale ſur la partie boréale & orientale ſur la partie méridionale.

COROLL. 4.

XCI. En paſſant donc tant l'un des deux méridiens que ce parallele MKN on rencontrera toujours une déclinaiſon contraire à celle qu'on a eu auparavant, à moins qu'on ne paſſe par les points d'interſection M ou N, un tel paſſage devant être cenſé double.

REMARQUE.

XCII. Puisque les lignes ſans déclinaiſon forment deux interſections M & N, il eſt évident qu'aucune autre ligne Halleyenne ne ſauroit donner des interſections. Cela eſt auſſi clair par la détermination de la ligne du ſecond ordre, que nous avons donnée dans la ſection précédente ; car, puisqu'ici l'intervalle b doit pris négatif, la déclinaiſon δ à laquelle devroit repondre la ligne du ſecond ordre, ſeroit déterminée ainſi $\text{tang}\,\delta = \frac{\sqrt{-\sin a \sin b}}{\cos \frac{1}{2}(a+b)}$, & partant imaginaire. Cependant, puisque le cas $\delta = 0$ donne en effet une interſection, il faut remarquer, que l'équation, qui nous a fourni cy-deſſus cette valeur (69) a été diviſible par $\text{tang}\,\delta$, de ſorte que ce cas n'en eſt pas exclus. Donc, parce que la ligne du ſecond ordre ſe confond ici avec la ligne ſans déclinaiſon, il n'y aura point de lignes du premier ordre, mais toutes les lignes Halleyennes ſeront du troiſième ordre. Il ne reſte donc que d'en enſeigner la conſtruction, ce que je ferai dans le problème ſuivant.

PROBLEME XIV.

XCIII. *Dans le cas de cette ſection déterminer les lignes Halleyennes pour tous les degrés de déclinaiſon tant vers l'Eſt que vers le Oüeſt.*

SOLUTION.

Fig. 11. Que δ marque la déclinaiſon propoſée, & ſoit L un point dans la ligne que nous cherchons. Poſant maintenant $AC = c$; $CP = d$, $CPL = q$ & $PL = p$, la ſolution de ce problême ſera la même que celle du problême 9, la diverſité de la détermination des quantités c & d par a & b n'y cauſant aucun changement, puisqu'ici nous avons

avons $c = 90° - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$ & $d = 90° + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$. On commencera donc par chercher deux angles m & n en ſorte que

$$\text{tang } m = \frac{\text{tang } \delta \text{ cof } d}{\text{cof } c} = \frac{\text{tang } \delta \text{ ſin } \frac{1}{2}(b-a)}{\text{ſin } \frac{1}{2}(a+b)}$$

$$\text{tang } n = \frac{\text{tang } \delta \text{ cof } c}{\text{cof } d} = \frac{\text{tang } \delta \text{ ſin } \frac{1}{2}(a+b)}{\text{ſin } \frac{1}{2}(b-a)}.$$

Alors pour une longitude CPL $= q$ quelconque on cherchera deux arcs r & s en ſorte que

$$\text{tang } r = \frac{\text{tang } d \text{ ſin } m}{\text{ſin}(m-q)} = \frac{\text{cof } \frac{1}{2}(b-a) \text{ ſin } m}{\text{ſin } \frac{1}{2}(b-a) \text{ ſin}(m-q)}, \quad \&$$

$$\text{cof } s = \frac{\text{cof } c \text{ ſin}(n-q) \text{ ſin } r}{\text{ſin } d \text{ ſin } n} = \frac{\text{ſin } \frac{1}{2}(a+b) \text{ ſin}(n-q) \text{ ſin } r}{\text{cof } \frac{1}{2}(b-a) \text{ ſin } n}$$

De là on conclura deux valeurs pour la diſtance du point L au pole arctique P, ſavoir $p = r \pm s$. Or il ſuffit de calculer les lignes pour les déclinaiſons orientales, puiſque celles qui répondent aux occidentales, où δ négatif, leur ſont ſemblables, & tombent dans l'hemiſphére oppoſé. Toutes ces lignes ſeront du troiſième ordre, & ſortiront de chaque pole magnetique pour rentrer dans le pole voiſin de la Terre ; elles ſeront auſſi de part & d'autres avec le grand cercle PCp cP des angles égaux à la déclinaiſon δ. Par cette détermination on verra, que les lignes Halleyennes ſeront à peu près telles, qu'elles ſont répréſentées dans la figure 14. qui n'a pas beſoin d'explication. Fig. 14.

COROLL. I.

XCIV. On peut obſerver ici comme cy-deſſus, que ſi l'on applique en A un quart de cercle AE, qui faſſe avec le méridien PCp un angle CAE $= \delta$ vers l'occident, ſi δ eſt poſitif, le grand cercle tiré par les points C & E coupera tous les méridiens PLp en ſorte en O que PO $= r$. Fig. 11.

COROLL. 2.

Fig. 13. & 14. XCV. Or le petit cercle parallele à l'équateur MKN, où la déclinaiſon eſt nulle, coupe en ſorte les méridiens de l'hemiſphére ſupérieur, que ſous la partie vers le Nord la déclinaiſon eſt orientale, & ſous la partie vers le Sud occidentale.

REMARQUE.

XCVI. Puisque toutes les lignes Halleyennes ſont du troiſième ordre, & que chacune ne s'éloigne du pole qu'à une certaine diſtance, il ſera bon de déterminer pour chaque déclinaiſon la plus grande distance du pole arctique, afin qu'on ſache jusqu'à quelle latitude chaque degré de déclinaiſon s'étend. Ce ſera le ſujet du problème ſuivant.

PROBLEME XV.

XCVII. *Pour chaque déclinaiſon propoſée déterminer la diſtance, à laquelle la ligne Halleyenne, qui lui répond, s'éloigne du pole boreal de la Terre.*

SOLUTION.

Ayant trouvé entre p & q cette équation :

$$\text{tang}\,\delta\,\text{ſin}\,d\,\text{ſin}\,p + (\text{tang}\,\delta\,\text{coſ}\,d\,\text{coſ}\,q - \text{coſ}\,c\,\text{ſin}\,q)\,\text{coſ}\,p = \text{tang}\,\delta\,\text{coſ}\,c\,\text{coſ}\,q - \text{coſ}\,d\,\text{ſin}\,q$$

il s'agit de déterminer la plus grande valeur de p, laquelle ſe trouve par la différentiation en ſuppoſant $dp = 0$, en ſorte

$$(\text{tang}\,\delta\,\text{coſ}\,d\,\text{ſin}\,q + \text{coſ}\,c\,\text{coſ}\,q)\,\text{coſ}\,p = \text{tang}\,\delta\,\text{coſ}\,c\,\text{ſin}\,q + \text{coſ}\,d\,\text{coſ}\,q$$

multiplions la premiere par $\text{coſ}\,q$ & celle-cy par $\text{ſin}\,q$, pour avoir leur ſomme.

$$\text{tang}\,\delta\,\text{ſin}\,d\,\text{ſin}\,p\,\text{coſ}\,q + \text{tang}\,\delta\,\text{coſ}\,d\,\text{coſ}\,p = \text{tang}\,\delta\,\text{coſ}\,c$$

ou $$\text{ſin}\,d\,\text{ſin}\,p\,\text{coſ}\,q = \text{coſ}\,c - \text{coſ}\,d\,\text{coſ}\,p$$

Multiplions auſſi la premiere par $\text{ſin}\,q$ & la ſeconde par $-\text{coſ}\,q$; & alors leur ſomme donnera

$$\text{tang}\,\delta\,\text{ſin}\,d\,\text{ſin}\,p\,\text{ſin}\,q - \text{coſ}\,c\,\text{coſ}\,p = -\text{coſ}\,d$$

ou

ou $\quad \sin d \sin p \sin q = \dfrac{\cos c \cos p - \cos d}{\operatorname{tang} \delta}$.

Ajoutons enſemble les quarrés de ces deux formules pour éliminer q, & nous aurons

$\operatorname{tang}\delta^2 \sin d^2 \sin p^2 = \operatorname{tang}\delta^2 (\cos c - \cos d \cos p)^2 + (\cos c^2 \cos p^2 - \cos d)^2$

qui ſe réduit à celle-cy :

$\sin\delta^2 \sin d^2 \sin p^2 = \sin\delta^2 \cos c^2 - 2 \sin\delta^2 \cos c \cos d \cos p + \sin\delta^2 \cos d^2 \cos p^2$
$\quad + \cos\delta^2 \cos d^2 - 2 \cos\delta^2 \cos c \cos d \cos p + \cos\delta^2 \cos c^2 \cos p^2$

& poſant pour $\cos\delta^2$ ſa valeur $1 - \sin\delta^2$, on parvient à

$$\sin\delta^2 \sin c^2 \sin p^2 = (\cos d - \cos c \cos p)^2$$

par conſéquent :

$$-\sin\delta \sin c \sin p + \cos p = \cos d$$

dont la réſolution eſt très aiſée en cherchant un angle g, que $\operatorname{tang} g = \sin\delta \operatorname{tang} c$, & on aura

$$\cos(p + g) = \frac{\cos d \cos g}{\cos c},$$

d'où l'on trouve p doublement.

Pour la longitude q à laquelle répond cette plus grande valeur de p, à cauſe de $\cos c \cos p - \cos d = \pm \sin\delta \sin c \sin p$, on obtiendra

$\sin d \sin p \sin q = \pm \cos\delta \sin c \sin p$, ou $\sin q = \pm \dfrac{\cos\delta \sin c}{\sin d}$

& partant tous ces lieux les plus éloignés du pole P ne tombent pas dans un même méridien, mais plus la déclinaiſon δ approche de 90°, l'angle q ſera plus petit : qui évanouïra, ſi $\delta = 90°$.

COROLL. I.

XCVIII. Si l'on poſe $\dfrac{\cos d \cos g}{\cos c} = \cos h$, on aura $p + g = \pm h$ & les deux valeurs de p ſeront $p = g \pm h$. Car puiſque pour cha-

que

que déclinaiſon δ il y a deux lignes Halleyennes, l'une boréale, l'autre méridionale, dans les hemiſphéres oppoſés, la plus petite valeur de p ſert pour la boréale, & la plus grande pour la méridionale.

COROLL. 2.

XCIX. Les deux valeurs de q répondent auſſi à ces deux lignes, de ſorte que la poſitive convient à celle qui eſt dans l'hemiſphére ſupérieur; & la négative pour l'inférieur. Nous avons déjà obſervé que ſi δ eſt poſitif, ou la déclinaiſon orientale, la ligne boréale eſt dans l'hemisphére ſupérieur & la méridionale dans l'inférieur.

COROLL. 3.

C. Si la déclinaiſon δ évanouit, on aura $g = 0$, & partant $\cos h = \frac{\cos d}{\cos c}$, & de là $p = \pm h$, ce qui eſt la diſtance du parallele, où il n'y a point de déclinaiſon au pole P. Alors, quoique tous les points de cette ligne ſoyent également éloignés du pole, on trouve pourtant $\sin q = \pm \frac{\sin c}{\sin d}$, & cet angle convient aux déclinaiſons extremèment petites.

COROLL. 4.

CI. Pour de plus grandes déclinaiſons la longitude q devient plus petite, & ſi $\delta = 90°$, on aura $q = 0$, dans ce cas les points les plus éloignés des poles de la Terre ſeront dans les poles magnétiques, par lesquels toutes les ligne Halleyennes paſſent.

EXEMPLE.

CII. Soit P A $= a = 10°$ & p B $= b = 20°$; donc $c = 90° - \frac{1}{2} a - b = 75°$ & $d = 85°$: & calculons pour chaque déclinaiſon tant la plus grande diſtance p au pole P que l'angle C P L $= q$.

Décli-

Déclinaiſon	Ligne boreale		Ligne méridionale	
	diſtance p	angle q	diſtance p	angle q
		+		—
0°	70°, 19′	75°, 51′	70°, 19′	75°, 51′
5°	53 , 19	75 , 0	89 , 21	75 , 0
10	40 , 38	72 , 43	106 , 32	72 , 43
15	31 , 58	69 , 29	120 , 0	69 , 29
20	26 , 6	65 , 40	129 , 56	65 , 40
25	21 , 59	61 , 30	137 , 15	61 , 30
30	19 , 2	57 , 7	142 , 40	57 , 7
35	16 , 51	52 , 35	146 , 47	52 , 35
40	15 , 10	47 , 58	149 , 56	47 , 58
45	13 , 54	43 , 17	152 , 24	43 , 17
50	12 , 54	38 , 27	154 , 20	38 , 27
55	12 , 6	33 , 47	155 , 52	33 , 47
60	11 , 29	29 , 0	157 , 5	29 , 0
70	10 , 37	19 , 22	158 , 47	19 , 22
80	10 , 9	9 , 42	159 , 43	9 , 42
90	10 , 0	0 , 0	160 , 0	0 , 0

REMARQUE.

CIII. On voit par ce calcul, que les intervalles entre les lignes Halleyennes deviennent d'autant plus petits, plus la déclinaiſon augmente : ainſi dans les lignes boréales, celle qui répond à 5° eſt éloignée de 17° de la ligne ſans déclinaiſon; or de 5° à 10° il n'y a que 12°, 41′ d'intervalle, & de 10° à 15° l'intervalle eſt 8°, 40′ & ainſi de ſuite. Dans les lignes méridionales les intervalles ſont plus grands, puiſque la diſtance des poles du Sud eſt plus grande : car en général plus les poles magnétiques ſont éloignés des poles de la Terre, plus les lignes Halleyennes s'éloignent auſſi des poles ; & ſi les poles magnétiques ſe trouvoient effectivement dans un même méridien, par quelques obſervations des grandes déclinaiſons il ne ſeroit pas difficile d'eſtimer la vraye diſtance des poles magnétiques aux poles de la Ter-

re ; mais, comme il n'eſt pas probable que cela arrive, & quand même il arriveroit, il ne ſauroit durer long tems à cauſe de leur variabilité, il ne vaut pas la peine que je m'y arrête. Cependant le cas où les deux diſtances $AP = a$ & $Bp = b$ ſont égales, ſemble en lui même ſi remarquable, qu'il mérite bien un dévelopement particulier, ce que je ferai dans le problème ſuivant.

PROBLEME XVI.

ig. 12. CIV. *Si les deux poles magnétiques* A & B *ſont dans le même méridien également éloignés des poles de la Terre* P & p, *déterminer les lignes Halleyennes, pour tous les degrés de déclinaiſon.*

SOLUTION.

Puisqu'ici $b = a$, on aura $c = 90° - a$, & $d = 90°$: donc à l'endroit L déterminé par l'arc $PL = p$, & l'angle $CL = q$, la déclinaiſon δ ſera déterminée en ſorte :

$$\text{tang } \delta = \frac{\text{ſin } a \text{ coſ } p \text{ coſ } q}{-\text{ ſin } a \text{ coſ } q + \text{ ſin } p}.$$

Et partant, ſi la déclinaiſon δ eſt donnée, on aura entre p & q cette équation : $\text{tang } \delta \text{ ſin } p - \text{ ſin } a \text{ ſin } q \text{ coſ } p = \text{tang } \delta \text{ ſin } a \text{ coſ } q$,

pour la conſtruire poſons $\text{tang } r = \frac{\text{tang } \delta}{\text{ſin } a \text{ ſin } q}$,

& nous aurons $-\text{coſ}(p+r) = \text{ſin } a \text{ coſ } q \text{ ſin } r$. Soit donc s un tel angle que $\text{coſ } s = \text{ſin } a \text{ coſ } q \text{ ſin } r$, & puisque $p + r = 180° \pm s$, nous aurons les deux valeurs ſuivantes p :

$$p = 180° - r - s \quad \& \quad p = 180° - r + s.$$

La ligne ſans déclinaiſon ſera donc, outre les méridiens PCp & Pcp, l'équateur même de la Terre, & les déclinaiſons orientales ſe trouveront tant ſur l'hemiſphére ſupérieur vers le nord, que ſur l'inférieur vers le ſud : le contraire arrive à l'égard des déclinaiſons occidentales. Toutes ces lignes Halleyennes appartiennent au troiſième ordre, &

ſi

ſi l'on veut ſavoir ſeulement leur plus grand éloignement des poles, le problème précédent fournit une régle bien facile. Car, à cauſe de $c = 90 - a$ & $d = 90$, la plus grande diſtance de la ligne Halleyenne pour la déclinaiſon δ au pole étant poſée $= p$, ſera exprimée par cette égalité

$$\text{ſin } \delta \text{ cof } a \text{ ſin } p - \text{ſin } a \text{ cof } p = 0, \quad \text{ou} \quad \text{tang } p = \frac{\text{tang } a}{\text{ſin } \delta},$$

& la longitude q, à laquelle cette plus grande diſtance p ſe trouve, en ſorte : $\text{ſin } q = \text{cof } \delta \text{ cof } a$.

COROLL. 1.

CV. On peut rendre le calcul des lignes Halleyennes plus commode, en cherchant les arcs r & s en ſorte que

$$\text{tang } r = \frac{\text{tang } \delta}{\text{ſin } a \text{ ſin } q} \quad \& \quad \text{cof } s = -\text{ſin } a \text{ cof } q \text{ ſin } r,$$

car alors les deux valeurs de p ſeront

$$p = s - r \qquad \& \qquad p = -s - r.$$

COROLL. 2.

CVI. En prenant δ poſitif, ſi l'on donne à q ſucceſſivement toutes les valeurs depuis 0° jusqu'à 180°, l'arc r ſera toujours moindre que 90°, & tant que q eſt $< 90°$, l'arc s ſera plus grand que 90°, & partout la premiere valeur $p = s - r$ poſitive, & l'autre $p = -s - r$ négative plus grande que 90°, qui s'étendra dans l'hemiſphére inférieur au delà de l'équateur.

COROLL. 3.

CVII. Si l'on poſe $q = 90° + \Phi$, on aura pour r la même valeur que poſant $q = 90° - \Phi$, mais alors au lieu de s on trouvera $180° - s$: donc les deux valeurs de p ſeront :

$$p = 180° - s - r \quad \& \quad p = -180° + s - r$$

dont la premiere eſt poſitive & l'autre négative.

COROLL. 4.

CVIII. Il ſuffit donc de pouſſer le calcul ſeulement juſqu'à $q = 90$, & puiſque les lignes Halleyennes dans les quatre quartiers de la Terre ſont ſemblables entr'elles, il ſuffit de les calculer pour un ſeul quartier, car alors

$$q = 90° - \Phi \quad \text{donne} \quad p = s - r$$

$$\& \quad q = 90° + \Phi \quad \text{donne} \quad p = 180 - s - r$$

$$\text{prenant} \quad \text{tang } r = \frac{\text{tang } \delta}{\text{ſin } a \text{ cof } \Phi} \quad \& \quad \text{cof } s = -\text{ſin } a \text{ ſin } \Phi \text{ ſin } r.$$

COROLL. 5.

CIX. Si l'on prend $\Phi < \delta$, on trouvera la ſeconde valeur de p négative, qui répond à la longitude $q = 90° + \Phi$: il en ſera donc marqué un point dans l'hemiſphére inférieur, où la déclinaiſon n'eſt pas δ, mais $180° + \delta$: qui convient avec la déclinaiſon occidentale de $180° - \delta$, cette ligne étant la continuation de celle qui répond à la déclinaiſon orientale δ.

REMARQUE.

CX. La maniere dont je me ſers ici pour déterminer les lignes courbes tracées ſur une ſurface ſphérique, par une équation entre l'angle $CPL = q$ & l'arc $PL = p$, peut indiquer le même point en pluſieurs manieres. Ainſi l'angle q demeurant le même comme les arcs p, $\pm 360° + p$, $\pm 720° + p$ &c. marquent le même point de la ſphére, les deux coordonnées p & q enſemble peuvent varier pour le même point : car on peut auſſi rapporter le point L à la longitude $180° + q$, ou à cette négative $-(180 - q)$, en prenant au lieu de p l'arc négatif $-p$, ou $360° - p$. Une telle différence dans nos formules ne change donc rien dans les courbes mêmes.

QUA-

QUATRIÈME SECTION.

Les deux Poles magnétiques de la Terre étant placés en deux méridiens différens.

PROBLEME XVII.

CXI. *Les deux poles magnétiques* A & B *étant placés en deux méridiens différens* PAp & PBp, *déterminer la déclinaiſon magnétique pour un lieu quelconque* L *de la Terre.* Fig. 15.

SOLUTION.

Soient les diſtances des poles magnétiques aux poles de la Terre $AP = a$, $Bp = b$, & l'angle que font les deux méridiens des poles magnétiques, $APB = \gamma$. Qu'on tire par les poles magnétiques l'arc de grand cercle ACB dont le milieu ſoit en C, & poſons $CA = CB = c$, & on aura à cauſe de $PB = 180° - b$;

$$\text{cof}\, 2c = \text{ſin}\, a\ \text{ſin}\, b\ \text{cof}\gamma - \text{cof}\, a\ \text{cof}\, b.$$

Tirons par C le méridien PC, & au lieu des trois élémens principaux a, b, γ, introduiſons dans le calcul ces trois dérivés déterminables par ceux-là :

$$CA = CB = c;\ CP = d;\ \text{\& l'angle } ACP = e.$$

Maintenant ſoit propoſé un lieu quelconque L de la Terre, où $L\delta$ répréſente la direction magnétique, auquel ayant tiré l'arc du grand cercle CL, ſoit comme dans le problême ſeptième $CL = m$ & l'angle $ACL = n$; & on aura $\text{tang}\, CL\delta = \dfrac{\text{tang}\, n\,(1 - \text{cof}\, c\ \text{cof}\, m)}{\text{cof}\, c - \text{cof}\, m}$.

Conſidérons PC comme le premier méridien, & ayant tiré par L le méridien PLp, ſoit la longitude comptée vers l'occident ou l'angle $CPL = q$, & l'arc $PL = p$. Maintenant le triangle ſphérique CPL fournira $\text{cof}\, CL = \text{cof}\, m = \text{cof}\, d\ \text{cof}\, p + \text{ſin}\, d\ \text{ſin}\, p\ \text{cof}\, q$

$$\text{tang}\, PCL = \text{tang}\,(n - e) = \frac{\text{ſin}\, p\ \text{ſin}\, q}{\text{ſin}\, d\ \text{cof}\, p - \text{cof}\, d\ \text{ſin}\, p\ \text{cof}\, q}$$

$$\text{tang CLP} = \frac{\text{sin } d \text{ sin } q}{\text{cos } d \text{ sin } p - \text{sin } d \text{ cos } p \text{ cos } q} = \text{tang (CL}\delta + \delta)$$

posant la déclinaison en L entant qu'elle est orientale, ou l'angle $PL\delta = \delta$. Posons comme dans le problème huitième pour abréger:

$$\text{cos } d \text{ cos } p + \text{sin } d \text{ sin } p \text{ cos } q = A; \quad \begin{matrix} \text{sin } d \text{ cos } p - \text{cos } d \text{ sin } p \text{ cos } q = B \\ \text{cos } d \text{ sin } p - \text{sin } d \text{ cos } p \text{ cos } q = C \end{matrix}$$

& nous aurons:

$$\text{cos } m = A; \quad \text{tang } (n - e) = \frac{\text{sin } p \text{ sin } q}{B} = \frac{\text{tang } n - \text{tang } e}{1 + \text{tang } e \text{ tang } n}$$

$$\& \qquad \text{tang (CL}\delta + \delta) = \frac{\text{sin } a \text{ sin } q}{C} = \frac{\text{tang CL}\delta + \text{tang } \delta}{1 - \text{tang } \delta \text{ tang CL}\delta}$$

$$\text{d'où nous tirons:} \qquad \text{tang } \delta = \frac{\text{sin } d \text{ sin } q - C \text{ tang CL}\delta}{C + \text{sin } d \text{ sin } q \text{ tang CL}\delta}.$$

$$\text{Or de là nous avons} \qquad \text{tang } n = \frac{B \text{ tang } e + \text{sin } p \text{ sin } q}{B - \text{tang } e \text{ sin } p \text{ sin } q}$$

$$\& \text{ partant} \quad \text{tang CL}\delta = \frac{1 - A \text{ cos } c}{\text{cos } c - A} \cdot \frac{B \text{ tang } e + \text{sin } p \text{ sin } q}{B - \text{tang } e \text{ sin } p \text{ sin } q}$$

Donc substituant cette valeur il proviendra

$$\text{tang } \delta = \frac{\text{sin } d \text{ sin } q (\text{cos } c - A)(B - \text{tang } e \text{ sin } p \text{ sin } q) - C(1 - A \text{ cos } c)(B \text{ tang } e + \text{sin } p \text{ sin } q)}{C(\text{cos } c - A)(B - \text{tang } e \text{ sin } p \text{ sin } q) + \text{sin } d \text{ sin } q (1 - A \text{ cos } c)(B \text{ tang } e + \text{sin } p \text{ sin } q)}$$

ou bien

$$\text{tang } \delta =$$

$$\frac{\begin{matrix} -\text{sin } q (AB \text{ sin } d + C \text{ sin } p) + \text{cos } c \text{ sin } q (AC \text{ sin } p + B \text{ sin } d) + \text{tang } e (A \text{ sin } d \text{ sin } p \text{ sin } q^2 - BC) \\ + \text{cos } c \text{ tang } e (ABC - \text{sin } d \text{ sin } p \text{ sin } q^2) \end{matrix}}{\begin{matrix} \text{sin } d \text{ sin } p \text{ sin } q^2 - ABC - \text{cos } c (A \text{ sin } d \text{ sin } p \text{ sin } q^2 - BC) + \text{tang } e \text{ sin } q (AC \text{ sin } p + B \text{ sin } d) \\ - \text{cos } c \text{ tang } e \text{ sin } q (AB \text{ sin } d + C \text{ sin } p) \end{matrix}}$$

Or nous avons vu cy-dessus §. LV. que

$$AC \text{ sin } p + B \text{ sin } d = (1 - AA) \text{cos } p \; ; \quad AB \text{ sin } d + C \text{ sin } p = (1 - AA) \text{cos } d$$

$$A \text{ sin } d \text{ sin } p \text{ sin } q^2 - BC = (1 - AA) \text{cos } q \; ; \quad \text{sin } d \text{ sin } p \text{ sin } q^2 - ABC = (1 - AA)(\text{sin } d \text{ sin } p + \text{cos } d \text{ cos } p \text{ cos } q)$$

donc

donc, puisque le numérateur & dénominateur eſt diviſible par $1-AA$, on trouvera par cette réduction

$$\text{tang}\delta = -\frac{\text{cf}\,f\,\text{sin}\,g + \text{cf}\,e\,\text{cf}\,p\,\text{sin}\,g + \text{tang}\,e\,\text{cf}\,g - \text{cf}\,\text{tang}\,(\text{sin}\,d\,\text{sin}\,p + \text{cf}\,d\,\text{cf}\,p\,\text{cf}\,g)}{\text{sin}\,d\,\text{sin}\,p + \text{cf}\,d\,\text{cf}\,p\,\text{cf}\,g - \text{cf}\,e\,\text{cof}\,g + \text{tg}\,e\,\text{cof}\,p\,\text{sin}\,g - \text{cf}\,e\,\text{cf}\,d\,\text{tg}\,e\,\text{sin}\,g}$$

d'où l'on peut déterminer la déclinaiſon magnétique pour tous les lieux de la Terre par les trois élémens donnés c, d & e.

COROLL. 1.

CXII. Des trois élémens principaux a, b, γ, les trois autres c, d, e, que nous avons introduits dans le calcul, ſont déterminés en ſorte $\text{cof}\,2\,c = \text{sin}\,a\,\text{sin}\,b\,\text{cof}\gamma - \text{cof}\,a\,\text{cof}\,b$

$$\text{cof}\,d = \frac{\text{cof}\,a - \text{cof}\,b}{2\,\text{cof}\,c} \quad \& \quad \text{tang}\,e = \frac{\text{sin}\,a\,\text{sin}\,b\,\text{sin}\,\gamma}{(\text{cof}\,a + \text{cof}\,b)\,\text{cof}\,c}$$

& de là

$$\text{tang APC} = \frac{\text{sin}\,b\,\text{sin}\,\gamma}{\text{sin}\,a + \text{sin}\,b\,\text{cof}\gamma} \quad \& \quad \text{tang BPC} = \frac{\text{sin}\,a\,\text{sin}\,\gamma}{\text{sin}\,b + \text{sin}\,a\,\text{cof}\gamma}.$$

COROLL. 2.

CXIII. Donc, pour le lieu propoſé L ſi l'on prend $\text{tang}\,q = \frac{\text{sin}\,a\,\text{sin}\,\gamma}{\text{sin}\,b + \text{sin}\,a\,\text{cof}\gamma}$ le méridien PLp paſſe par le pole magnétique B; & ſi l'on prend $\text{tang}\,q = -\frac{\text{sin}\,b\,\text{sin}\,\gamma}{\text{sin}\,a + \text{sin}\,b\,\text{cof}\gamma}$ le méridien PLp paſſera par le pole magnétique A.

COROLL. 3.

CXIV. Réciproquement ſi les élémens c, d, e ſont regardés comme donnés, les primitifs a, b, γ en ſont déterminés en ſorte :

$$\text{cof}\,a = \text{sin}\,c\,\text{sin}\,d\,\text{cof}\,e + \text{cof}\,c\,\text{cof}\,d$$
$$\text{cof}\,b = \text{sin}\,c\,\text{sin}\,d\,\text{cof}\,e - \text{cof}\,c\,\text{cof}\,d$$

$$\text{tang APC} = \frac{\text{sin}\,c\,\text{sin}\,e}{\text{cf}\,c\,\text{sin}\,d - \text{sin}\,c\,\text{cf}\,d\,\text{cf}\,e} : \text{tang BPC} = \frac{\text{sin}\,c\,\text{sin}\,e}{\text{cf}\,c\,\text{sin}\,d + \text{sin}\,c\,\text{cf}\,d\,\text{cf}\,e}$$

d'où

d'où $\text{tang}\,\gamma = \dfrac{2\,\text{sin}\,c\,\text{cos}\,c\,\text{sin}\,d\,\text{sin}\,e}{\text{sin}\,d^2 - \text{sin}\,c^2 - \text{sin}\,c^2\,\text{sin}\,d^2\,\text{sin}\,e^2}$.

COROLL. 4.

CXV. Pour faciliter ce calcul, on peut chercher un angle f de ſorte que $\text{tang}\,f = \text{tang}\,c\,\text{cos}\,e$, & alors on aura

$$\text{cos}\,a = \frac{\text{cos}\,c\,\text{cos}(d-f)}{\text{cos}\,f}\,;\quad \text{cos}\,b = -\frac{\text{cos}\,c\,\text{cos}(d+f)}{\text{cos}\,f}$$

$$\text{tang}\,APC = \frac{\text{tang}\,c\,\text{sin}\,e\,\text{cos}\,f}{\text{sin}(d-f)}\,;\quad \text{tang}\,BPC = \frac{\text{tang}\,c\,\text{sin}\,e\,\text{cos}\,f}{\text{sin}(d+f)}$$

& $\gamma = APC + BPC$.

PROBLEME XVIII.

CXVII. *Sous chaque méridien de la Terre déterminer les endroits, où la déclinaiſon magnétique eſt d'une quantité donnée ou vers l'Eſt ou vers l'Oüeſt.*

SOLUTION.

Ayant établi les élémens c, d, e, qui déterminent la poſition des poles magnétiques ſur la Terre, ſoit δ la déclinaiſon magnétique propoſée, & dirigée vers l'Eſt, ſi δ eſt un angle poſitif. Prenons PC pour le premier méridien, duquel ſoit éloigné le méridien propoſé PLp vers l'Oüeſt de l'angle $CPL = q$, & il s'agit de trouver l'arc $PL = p$ par le moyen de l'équation trouvée dans le problême précédent, que je répréſente de cette façon

$$\text{sin}\,d\,(\text{tang}\,\delta + \text{cos}\,c\,\text{tang}\,e)\,\text{sin}\,p$$
$$+ [\text{cos}\,d(\text{tag}\,\delta + \text{cos}\,c\,\text{tag}\,e)\,\text{cos}\,q - (\text{cos}\,c - \text{tag}\,\delta\,\text{tag}\,e)\,\text{sin}\,q]\,\text{cos}\,p =$$
$$(\text{tang}\,e + \delta\,\text{cos}\,c)\,\text{cos}\,q - \text{cos}\,d\,(1 - \text{tag}\,\delta\,\text{cos}\,c\,\text{tag}\,e)\,\text{sin}\,q$$

Poſons pour abréger

$A = \text{sin}\,d\,(\text{tang}\,\delta + \text{cos}\,c\,\text{tang}\,e)$
$B = \text{cos}\,d\,(\text{tang}\,\delta + \text{cos}\,c\,\text{tang}\,e)$
$C = \text{cos}\,c - \text{tang}\,\delta\,\text{tang}\,e$
$D = \text{tang}\,e + \text{tang}\,\delta\,\text{cos}\,c$
$E = \text{cos}\,d\,(1 - \text{tang}\,\delta\,\text{cos}\,c\,\text{tang}\,e)$

pour

fournit pour avoir à réſoudre cette équation :

$$A \sin p + (B \cos q - C \sin q) \cos p = D \cos q - E \sin q$$

Cherchons comme cy-deſſus §. LXI. deux arcs r & s, de ſorte que

$$\text{tang } r = \frac{A}{B \cos q - C \sin q} \quad \& \quad \cos s = \frac{(D \cos q - E \sin q) \sin r}{A}$$

& nous aurons pour p cette double valeur $p = r \pm s$. Mais, pour rendre ce calcul plus commode, cherchons deux arcs m & n tels que

$$\text{tang } m = \frac{B}{C} \quad \& \quad \text{tang } n = \frac{D}{E}$$

d'où nous aurons :

$$\text{tang } r = \frac{A \cos m}{C \sin (m - q)} = \frac{A \sin m}{B \sin (m - q)}$$

$$\text{tang } s = \frac{E \sin r \sin (n - q)}{A \cos n} = \frac{D \sin r \sin (n - q)}{A \sin n}$$

Il ne reſte donc que de calculer commodement les valeurs des lettres A, B, C, D & E. Pour cet effet cherchons deux angles f & g tels que

$$\text{tang } f = \text{tang } e \cos c \quad \& \quad \text{tang } g = \frac{\text{tang } e}{\cos c},$$

d'où nous tirons

$$A = \frac{\sin d \sin (f + \delta)}{\cos \delta \cos f}; \quad B = \frac{\cos d \sin (f + \delta)}{\cos \delta \cos f}; \quad D = \frac{\cos e \sin (g + \delta)}{\cos \delta \cos g}$$

$$C = \frac{\cos e \cos (g + \delta)}{\cos \delta \cos g}; \quad E = \frac{\cos d \cos (f + \delta)}{\cos \delta \cos f}$$

Si nous ſubſtituons ces valeurs, tout revient à calculer les angles f, g, m, n, r, & s par les formules ſuivantes

$$\text{tang } f = \text{tang } e \cos c \; ; \quad \text{tang } g = \frac{\text{tang } e}{\cos c}$$

$$\text{tang } m = \frac{\cos d \cos g \sin (f + \delta)}{\cos e \cos f \cos (g + \delta)}; \quad \text{tang } n = \frac{\cos e \cos f \sin (g + \delta)}{\cos d \cos g \cos (f + \delta)}$$

$\text{tang } r = \frac{\text{tang } d \text{ sin } m}{\text{sin } (m-q)}$; & enfin $\text{cos } s = \frac{\text{sin } r \text{ sin } (n-q)}{\text{tang } d \text{ tang } (f+\delta) \text{ cos } n}$,

d'où l'on déduit $p = r \pm s$.

COROLL. 1.

CXVIII. Il faut ici remarquer, que les deux premiers arcs f & g ne dépendent, ni de la déclinaiſon propoſée δ, ni de la longitude q: mais uniquement de la poſition des poles magnétiques, ou des élémens c, d, e. Ces deux arcs demeurent donc les mêmes pour toutes les déclinaiſons δ & toutes les longitudes.

COROLL. 2.

CXIX. Les deux arcs ſuivans m & n renferment outre les élémens c, d, e la déclinaiſon magnétique propoſée δ; mais, comme ils ne dépendent pas de q, ils demeurent les mêmes pour toutes les longitudes: & ce ne ſont que les deux derniers arcs r & s qu'on eſt obligé de calculer pour chaque longitude.

COROLL. 3.

CXX. On peut auſſi obſerver que $\text{tang } m \cdot \text{tang } n = \text{tang } (f+\delta) \text{ tang } (g+\delta)$, d'où le calcul de ces deux arcs ſera facilité, quoiqu'il ſoit ſans cela aſſez prompt, puisque la même quantité $\frac{\text{cos } e \text{ cos } f}{\text{cos } d \text{ cos } g}$ entre dans l'un & l'autre.

COROLL. 4.

CXXI. Par ces formules on calculera aiſément toutes les lignes Halleyennes, qui paſſent par tous les endroits, où la déclinaiſon eſt la même. Pour la ligne ſans déclinaiſon les arcs m & n ſeront déterminés plus ſimplement en ſorte

$$\text{tang } m = \frac{\text{cos } d}{\text{cos } c} \text{tang } f = \text{cos } d \text{ tang } e \quad \& \quad \text{tang } n = \frac{\text{tang } e}{\text{cos } d}$$

& de là on aura

$$\text{tang } r = \frac{\text{tang } d \text{ sin } m}{\text{sin } (m-q)} \quad \& \quad \text{cos } s = \frac{\text{sin } r \text{ sin } (n-q)}{\text{cos } c \text{ sin } d \text{ sin } n}$$

PRO-

PROBLEME XIX.

CXXII. *Entre toutes les lignes Hallejennes déterminer celle qui eſt du ſecond ordre, dont les branches forment un point d'interſection.*

SOLUTION.

Pour trouver la déclinaiſon δ à laquelle répond cette ligne du ſecond ordre, ayant repréſenté notre équation générale en cette forme:

$$A \sin p + (B \cos q - C \sin q) \cos p = D \cos q - E \sin q$$

la ſolution de ce problème eſt déjà donnée dans le problème X, & ſes corollaires, d'où celle-cy nous fournira la plus ſimple:

$$\text{tang } 2q = \frac{2(BC-DE)}{-BB+CC+DD-EE} \quad \& \quad \text{tang } q^2 = \frac{AA+BB-DD}{AA+CC-EE}$$

Or les valeurs de A, B, C, D, E expoſées dans le problème précédent donnent

$$BC - DE = -\cos d \sin c^2 \text{ tang } e\,(1+\text{tang}\,\delta^2)$$
$$BB + EE = \cos d^2\,(1+\cos c^2 \text{ tang } e^2)(1+\text{tang}\,\delta^2)$$
$$CC + DD = (\cos c^2 + \text{tang } e^2)(1+\text{tang}\,\delta^2)$$

& partant

$$\text{tang } 2q = \frac{-2\cos d \sin c^2 \text{ tang } e}{\cos c^2 + \text{tang } e^2 - \cos d^2\,(1+\cos c^2 \text{tang } e^2)} = \frac{2\,\text{tang}\,q}{1-\text{tang}\,q^2}$$

où la déclinaiſon δ n'entre plus. Mais pour l'autre formule nous trouvons

$$AA + BB - DD = \sin c^2(\text{tang}\,\delta^2 - \text{tang}\,e^2)$$
$$AA + CC - EE = \sin d^2\,(1+\text{tang}\,e^2)(\text{tang}\,\delta^2 + \cos c^2)$$
$$- \cos d^2 \sin c^2\,(1-\text{tang}\,\delta^2 \text{ tang}\,e^2)$$

& partant

$$\text{tang}\,q^2 = \frac{\sin c^2\,(\text{tang}\,\delta^2 - \text{tang}\,e^2)}{\sin d^2(1+\text{tang}\,e^2)(\text{tang}\,\delta^2+\cos c^2) - \cos d^2 \sin c^2(1-\text{tang}\,\delta^2 \text{tang}\,e^2)}$$

ou bien $\text{tang } q^2 =$

$$\frac{\text{ſin } c^2\,(\text{tang}\,\delta^2 - \text{tang } e^2)}{(1+\text{tang } e^2)(\text{tang}\,\delta^2+\text{coſ}\,c^2)-\text{coſ}\,d^2\,(1+\text{coſ}\,c^2\,\text{tang } e^2)(1+\text{tang}\,\delta^2)}$$

d'où l'on tire $1-\text{tang } q^2 =$

$$\frac{(\text{coſ}\,c^2+\text{tang } e^2)(1+\text{tang}\,\delta^2)-\text{coſ}\,d^2(1+\text{coſ}\,c^2\,\text{tang } e^2)(1+\text{tang}\,\delta^2)}{(1+\text{tang } e^2)(\text{tang}\,\delta^2+\text{coſ}\,c^2)-\text{coſ}\,d^2(1+\text{coſ}\,c^2\,\text{tang } e^2)(1+\text{tang}\,\delta^2)}$$

& partant $\text{tang } q =$

$$\frac{-\text{coſ}\,d\,\text{ſin } c^2\,\text{tang } e\,(1+\text{tang}\,\delta^2)}{(1+\text{tang } e^2)(\text{tang}\,\delta^2+\text{coſ}\,c^2)-\text{coſ}\,d^2\,(1+\text{coſ}\,c^2\,\text{tang } e^2)(1+\text{tang}\,\delta^2)}$$

qui ſe réduiſent à celles-cy

$$\text{tang } q = \frac{-\text{ſin } c^2\,\text{coſ}\,d\,\text{ſin } e\,\text{coſ } e}{1-\text{coſ}\,d^2\,(\text{coſ } e^2+\text{coſ}\,c^2\,\text{ſin } e^2)-\text{coſ}\,\delta^2\,\text{ſin}\,c^2} \quad \&$$

$$\text{tang } q^2 = \frac{\text{ſin}\,c^2\,(\text{ſin}\,\delta^2\,\text{coſ } e^2-\text{coſ}\,\delta^2\,\text{ſin } e^2)}{1-\text{coſ}\,d^2\,(\text{coſ } e^2+\text{coſ}\,c^2\,\text{ſin } e^2)-\text{coſ}\,\delta^2\,\text{ſin}\,c^2}$$

& de là nous parvenons à cette équation

$$\text{coſ}\,\delta^4\,\text{ſin}\,c^2-\text{cſ}\,\delta^2\,[1+\text{ſin}\,c^2\,\text{cſ}\,e^2-\text{cſ}\,d^2\,(\text{cſ}\,e^2+\text{cſ}\,c^2\,\text{ſin}\,e^2)]+\text{ſin}\,d^2\,\text{cſ}\,e^2=0$$

ou à celle-cy

$$\text{coſ}\,\delta^4\,\text{ſin}\,c^2-\text{coſ}\,\delta^2\,(\text{ſin}\,c^2+\text{ſin}\,d^2-\text{ſin}\,c^2\,\text{ſin}\,d^2\,\text{ſin}\,e^2)+\text{ſin}\,d^2\,\text{coſ}\,e^2=0$$

dont la réſolution nous découvre la déclinaiſon δ, pour laquelle la ligne Halleyenne aura des interſections. De là il eſt évident, que la déclinaiſon δ peut être priſe poſitivement & négativement.

COROLL. I.

CXXIII. La réſolution de cette équation quarré-quarrée donne

$\text{coſ}\,\delta^2 =$

$$\frac{\text{ſin}\,c^2+\text{ſin}\,d^2-\text{ſin}\,c^2\,\text{ſin}\,d^2\,\text{ſin}\,e^2 \pm \sqrt{[(\text{ſin}\,c^2+\text{ſin}\,d^2-\text{ſin}\,c^2\,\text{ſin}\,d^2\,\text{ſin}\,e^2)^2-4\,\text{ſin}\,c^2\,\text{ſin}\,d^2\,\text{coſ}\,e^2]}}{2\,\text{ſin}\,c^2}$$

&

& enſuite $\cos\delta =$

$$\frac{\sqrt{(\sin c^2+\sin d^2-\sin c^2\sin d^2\sin e^2+2\sin c\sin d\cos e)}+\sqrt{(\sin c^2+\sin d^2-\sin c^2\sin d^2\sin e^2-2\sin c\sin d\cos e)}}{2\sin c}$$

ou

$$\cos\delta = \frac{\sqrt{[(1+\sin c\sin d\cos e)^2-\cos c^2\cos d^2]}\pm\sqrt{[(1-\sin c\sin d\cos e)^2-\cos c^2\cos d^2]}}{2\sin c}$$

COROLL. 2.

CXXIV. Mais, pour calculer cette valeur, qu'on cherche les angles h, k & l par ces formules :

$\tang h = \sin c\sin d\sin e$; $\cos k = \frac{\cot.c\cot.d\sin h}{\sin(e+h)}$; $\cos l = \frac{\cot.c\cot.d\sin h}{\sin(e-h)}$

& alors on aura $\cos\delta = \frac{\cos c\cos d\sin(k\pm l)}{2\sin c\cos k\cos l}$.

EXEMPLE I.

CXXV. Suppoſons pour la poſition des poles magnétiques $AP = a = 15°$; $Bp = b = 25°$; & $APB = \gamma = 40°$ & on trouvera les élémens dérivés :

$CA = CB = c = 71°,10'$; $CP = d = 84°,43'$; $ACP = e = 6°,38'$ & de là les angles $APC = 25°$ & $BPC = 15°$.

Enſuite pour la ligne du ſecond ordre l'équation quarré-quarrée devient $\cos\delta^4 = 2,09367\cos\delta^2 - 1,09210$ & de là $\delta = 6°,52'$.

REMARQUE.

CXXVI. Par cet exemple on comprend, que l'angle e ſera toujours fort petit, & que l'arc $CP = d$ approchera fort d'un angle droit. De là on peut tirer une approximation pour la valeur de δ : car, ſi $e = 0$, on a ou $\cos\delta = 1$, ou $\cos\delta = \frac{\sin d}{\sin c}$: donc, puiſque la derniere eſt imaginaire dans notre ſuppoſition, ou $d > c$, la

premiere doit fournir l'approximation. Or, poſant $1 - \sin\delta^2$ pour $\cos\delta^2$ notre équation ſera

$$\cos c^2 \sin d^2 \sin e^2 = \sin\delta^2 (\sin d^2 - \sin c^2 - \sin c^2 \sin d^2 \sin e^2) + \sin\delta^4 \sin c^2$$

d'où l'on tire à peu près $\sin\delta^2 = \dfrac{\cos c^2 \sin d^2 \sin e^2}{\sin d^2 - \sin c^2}$

& encore plus exactement :

$$\sin\delta^2 = \frac{\cos c^2 \sin d^2 \sin e^2}{\sin d^2 - \sin c^2} - \frac{\sin c^2 \cos c^2 \sin d^4 \cos d^2 \sin e^4}{(\sin d^2 - \sin c^2)^3}$$

Mais la premiere donne déjà la valeur de δ à un ou deux minutes près, de ſorte qu'on peut prendre $\sin\delta = \dfrac{\cos c \sin d \sin e}{\sqrt{(\sin d^2 - \sin c^2)}}$.

EXEMPLE 2.

CXXVII. Suppoſons $a = 15°$, $b = 30°$, & $\gamma = 45°$, & on aura

$c = 69°, 4', 48''$; $d = 81°, 57', 30''$; & $e = 7°, 57', 48''$

enſuite les angles $APC = 30°$, $BPC = 15°$; & pour la ligne Halleyenne du ſecond ordre

$\cos\delta^4 - 2{,}10487 \cos\delta^2 + 1{,}10217 = 0$, & $\delta = 8°, 25'$.

REMARQUE.

CXXVIII. Si les deux diſtances a & b étoient égales, d ſeroit de 90° ; & plus la diſtance b ſurpaſſe a, l'arc d devient plus petit : ainſi dans le dernier exemple d eſt plus petit que dans le premier. L'arc c dépend principalement des diſtances a & b, & ſon complément eſt un peu plus petit que $\dfrac{a+b}{2}$. En conſidérant la Carte de *Halley*, il ſemble que la ligne pour la déclinaiſon de 10° étoit à peu prés celle du ſecond ordre, d'où l'on peut convenablement déterminer les élémens c, d, e. Or il paroit auſſi que la diſtance b étoit beaucoup plus grande que a, & partant d bien au deſſous de 90°.

Si

Si nous posons $c = 70°$, & $d = 82°$, afin que pour la ligne du second ordre il devienne $\delta = 10°$, il faudroit prendre $e = 9°, 10'$. Faisons donc sur cette hypothese, qui selon toute apparence ne s'écarte pas beaucoup de l'état magnétique représenté dans la Table de *Halley*, le calcul, pour en construire une Carte, par laquelle on pourra juger, si deux poles magnétiques sont suffisans pour expliquer les phénomenes de la déclinaison.

HYPOTHESE.

CXXIX. Faisons donc les positions suivantes :
$AC = BC = c = 70°$; $CP = d = 82°$ & $ACP = e = 9°, 10'$
afin que la ligne du second ordre réponde à la déclinaison de 10°.

Pour en déduire les premiers élémens a, b, γ, cherchons un angle i, de sorte que $\text{tang } i = \text{tang } c \cos e$, & l'on aura

$$\cos a = \frac{\cos c \cos(d - i)}{\cos i}; \quad \cos b = -\frac{\cos c \cos(d + i)}{\cos i}$$

$$\text{tang APC} = \frac{\text{tang } e \sin i}{\sin(d - i)}; \quad \text{tang BPC} = \frac{\text{tang } e \sin i}{\sin(d + i)}$$

& $\gamma = APC + BPC$; d'où l'on trouve

$i = 69°, 46'$; $d - i = 12°, 14'$; $d + i = 151°, 46' = 180° - 28°, 14'$

$a = 14°, 53'$; $APC = 35°, 33'$;
$b = 29, 23$; $BPC = 17, 45$; & $\gamma = 53°, 18'$

Maintenant pour faire le calcul, qu'on commence par les angles f & g qu'on trouve : $f = 3°, 10'$ & $g = 25°, 15'$

de là on aura pour le calcul suivant en logarithmes

$$l \text{ tang } m = 9,56656 + l \sin(f + \delta) - l \cos(g + \delta)$$
$$l \text{ tang } n = 10,43344 + l \sin(g + \delta) - l \cos(f + \delta)$$

Passons donc en particulier aux Lignes Halleyennes.

Pour

Pour la Ligne ſans déclinaiſon.

CXXX. Poſant $\delta = 0$ on aura $m = 1°,17'$ & $n = 49°,13'$

& delà $l \text{ tang } r = 9,20463 - l \text{ ſin } (m - q)$

$l \text{ cof } s = 10,58984 + l \text{ ſin } r + l \text{ ſin } (n - q)$

d'où l'on fera le calcul pour tous les degrés de longitude en comptant depuis le premier méridien PC vers l'occident.

Longitude q	Les deux valeurs de p	
17°, 45′	150°, 37′	150°, 37′
20 , —	121 , 26	—174 , 28
30 , —	95 , 27	—132 , 19
40 , —	84 , 32	—113 , 16
50 , —	77 , 20	—101 , 44
60 , —	71 , 41	— 92 , 55
70 , —	66 , 44	— 86 , 14
80 , —	62 , 3	— 80 , 37
90 , —	57 , 13	— 75 , 25
100 , —	52 , 0	— 70 , 24
110 , —	—45 , 56	— 65 , 8
120 , —	—35 , 57	— 56 , 39
130 , —	—27 , 53	— 51 , 5
140 , —	9 , 46	— 37 , 4
144 , 27	—14 , 53	— 14 , 53

Dans les méridiens depuis 0°, jusqu'à 17°, 45′, de même que depuis 144°,27′, jusqu'à 180° les valeurs de p ſont imaginaires.

Les valeurs négatives de p doivent être priſes dans les méridiens oppoſés : & par cette raiſon il n'eſt pas néceſſaire de pouſſer le calcul au delà de 180.

Pour

Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaiſon 5° Eſt.

CXXXI. Poſant $\delta = 5°$, on trouve $m = 3°,28'$ & $n = 54°,5'$

& de là $l \text{ tang } r = 9,63372 - l \text{ ſin } (m - q)$

$l \text{ cof } s = 10,22257 + l \text{ ſin } r + l \text{ ſin } (n - q)$

d'où l'on obtient les déterminations ſuivantes.

Longitude q	Les deux valeurs de p	
13°, 42′	112°, 27′	112°, 27′
15 , —	97 , 34	132 , 18
20 , —	84 , 46	162 , 12
30 , —	74 , 17	—162 , 7
40 , —	67 , 54	—139 , 38
50 , —	62 , 49	—124 , 9
60 , —	58 , 12	—112 , 46
70 , —	53 , 39	—203 , 55
80 , —	48 , 58	— 96 , 42
90 , —	43 , 52	— 90 , 30
100 , —	38 , 7	— 84 , 57
110 , —	31 , 21	— 79 , 41
120 , —	22 , 58	— 74 , 20
130 , —	11 , 59	— 68 , 19
140 , —	— 4 , 0	— 60 , 2
145 , —	—16 , 22	— 52 , 58
148 , 35	—41 , 12	— 41 , 12

Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaiſon 5° Oüeſt.

CXXXII. Poſant $\delta = -5°$, on trouve $m = -0°, 43'$ & $n = 43°, 13'$ & de là

$$l \text{ tang } r = 8,95151 - l \text{ ſin } (q - m)$$

$$l \text{ cof } s = 10,77994 + l \text{ ſin } r + l \text{ ſin } (q - n)$$

d'où l'on obtient les déterminations ſuivantes :

Longitude q	Les deux valeurs de p	
13°, 43′	—160°, 14′	—160°, 14′
15 , —	—134 , 58	+171 , 30
20 , —	—111 , 24	+139 , 46
30 , —	— 93 , 49	+113 , 41
40 , —	— 84 , 50	+100 , 26
50 , —	— 78 , 44	+ 91 , 54
60 , —	— 73 , 56	+ 85 , 38
70 , —	— 69 , 44	+ 80 , 34
80 , —	— 65 , 48	+ 76 , 10
90 , —	— 61 , 55	+ 72 , 7
100 , —	— 57 , 37	+ 68 , 1
110 , —	— 52 , 42	+ 63 , 38
120 , —	— 46 , 41	+ 58 , 33
130 , —	— 38 , 27	+ 51 , 55
140 , —	— 25 , 2	+ 41 , 8
145 , —	— 13 , 25	+ 31 , 27
148 , 35	+ 9 , 58	+ 9 , 58

Pour

Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaiſon 10° Eſt.

CXXXIII. Poſant $\delta = 10°$, on a $m = 5°,52'$ & $n = 58°,7'$

& de là
$$l \tang r = 9,86190 - l \sin (m - q)$$
$$l \cos s = 10,05592 + l \sin r + l \sin (n - q)$$

d'où l'on obtient les déterminations ſuivantes.

Longitude q	Les deux valeurs de p	
0°, 0′	65°, 1′	+ 98°, 59′
10 , —	63 , 4	+128 , 14
20 , —	60 , 17	+156 , 49
30 , —	57 , 12	−178 , 32
40 , —	53 , 54	−158 , 38
50 , —	50 , 25	−142 , 55
60 , —	46 , 39	−130 , 29
70 , —	42 , 34	−120 , 30
80 , —	38 , 5	−112 , 17
90 , —	33 , 2	−105 , 24
100 , —	27 , 18	− 99 , 32
110 , —	20 , 38	− 94 , 24
120 , —	12 , 43	− 89 , 15
130 , —	3 , 9	− 85 , 47
140 , —	− 8 , 40	− 82 , 6
150 , —	−23 , 27	− 78 , 51
160 , —	−41 , 38	− 76 , 24
170 , —	−60 , 30	− 78 , 18
172 , —	−62 , 49	− 80 , 34
175 , —	−64 , 35	− 86 , 21

Cette ligne n'eſt pas tout à fait celle du ſecond ordre, mais il s'en faut fort peu; la raiſon en eſt, que je n'ai pas aſſez exactement déterminé cy-deſſus la valeur de l'angle e pour ce but peu important. Cette ligne eſt déjà du troiſième ordre, & dans cette hypotheſe la ligne du ſecond ordre répond à la déclinaiſon de 9°, 46′, 18″.

Pour la Ligne Halleyenne de 10° vers l'Oüeſt.

CXXXIV. Poſant $\delta = -10°$, on a $m = -2°,36'$ & $n = 35°,42'$

& de là $l \text{ tang } r = 9,50981 - l \text{ ſin } (q + 2°,36')$

$l \text{ cof } s = 10,15963 + l \text{ ſin } r + l \text{ ſin } (q - 35°,42')$

d'où l'on obtient les déterminations ſuivantes.

Longitude q	Les deux valeurs de p	
0°, 0′	—64°, 34′	—131°, 26′
10, —	—65, 17	+177, 17
20, —	—64, 29	+144, 39
30, —	—63, 15	+125, 13
40, —	—61, 46	+112, 52
50, —	—60, 7	+104, 25
60, —	—58, 15	+ 98, 17
70, —	—56, 9	+ 93, 35
80, —	—53, 42	+ 89, 50
90, —	—51, 22	+ 87, 16
100, —	—47, 30	+ 84, 10
110, —	—43, 20	+ 81, 56
120, —	—38, 0	+ 80, 0
130, —	—30, 53	+ 78, 19
140, —	—20, 51	+ 76, 55
150, —	— 5, 43	+ 75, 55
160, —	+18, 11	+ 75, 53
170, —	+52, 7	+ 84, 29
175, —	+61, 24	+103, 34

Pour

Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaiſon de 15° vers l'Eſt.

CXXXV. Poſant $\delta = 15°$, on a $m = 8°, 34'$, & $n = 61°, 32'$ & de là

$$l \text{ tang } r = 10,02527 - l \text{ ſin } (8°, 34' - q)$$

$$l \text{ cof } s = 9,95954 + l \text{ ſin } r + l \text{ ſin } (61°, 32' - q)$$

d'où l'on obtient les déterminations ſuivantes :

Longitude q	Les deux valeurs de p	
0°, 0′	+44°, 29′	+119°, 31′
10 , —	+46 , 50	+135 , 52
20 , —	+47 , 1	+154 , 11
30 , —	+45 , 48	+172 , 16
40 , —	+43 , 40	−171 , 16
50 , —	+40 , 52	−156 , 54
60 , —	+37 , 32	−144 , 42
70 , —	+33 , 43	−134 , 25
80 , —	+29 , 24	−125 , 46
90 , —	+24 , 30	−118 , 28
100 , —	+18 , 59	−112 , 19
110 , —	+12 , 42	−107 , 12
120 , —	+ 5 , 53	−103 , 1
130 , —	− 2 , 29	− 99 , 51
140 , —	−11 , 30	− 97 , 56
150 , —	−21 , 15	− 97 , 49
160 , —	−30 , 56	−100 , 30
170 , —	−39 , 8	−107 , 26

Pour la Ligne Halleyenne de la déclinaiſon de 15° vers l'Oüeſt.

CXXXVI. Poſant $\delta = -15°$, on a $m = -4°, 23'\frac{2}{3}$; $n = 26°, 15'$, & de là

$$l \text{ tang } r = 9,73640 - l \text{ tang } (q + 4°, 23')$$

$$l \text{ cof } s = 9,83368 + l \text{ fin } r + l \text{ fin } (q - 26°, 15')$$

Longitude q	Les deux valeurs de p	
0°	—25°, 22′	—170°, 38′
10°	—34, 29	+165, 29
20	—40, 32	+146, 14
30	—44, 15	+132, 13
40	—46, 22	+122, 12
50	—47, 22	+115, 2
60	—47, 33	+109, 57
70	—47, 4	+105, 4
80	—46, 0	+103, 24
90	—44, 17	+101, 37
100	—41, 55	+100, 39
110	—38, 44	+100, 32
120	—34, 32	+101, 26
130	—29, 0	+103, 39
140	—21, 40	+107, 52
150	—12, 5	+115, 13
160	— 0, 5	+127, 31
170	+13, 12	+146, 26

I REMARQUE.

CXXXVII. Quand on trace ces lignes ſur une Carte ou ſur un Globe, on y remarquera d'abord une ſi grande conformité avec les lignes de *Halley*, qu'on puiſſe attendre dans l'incertitude, où nous ſommes encore ſur la vraye poſition des poles magnétiques de la Terre : & l'on ne ſauroit presque plus douter, que ſi nous en avions une connoiſſance parfaite, l'accord ne devint plus grand, puisque ces lignes ſont ſuſceptibles d'une variété infinie en changeant tant les diſtances des poles magnétiques aux poles de la Terre, que l'intervalle des méridiens qui paſſent par les poles magnétiques.

II REMARQUE.

CXXXVIII. Cependant je ſuis obligé d'avoüer, que la Carte de *Halley* renferme quelques circonſtances, qu'on ne ſauroit jamais mettre d'accord avec l'hypotheſe de deux poles magnétiques. La principale eſt la diſtance entre les lignes ſans déclinaiſon ſur l'équateur : l'une, à la droite de laquelle la déclinaiſon eſt occidentale & à la gauche orientale, coupe ſur la Carte de *Halley* l'équateur au 17me degré vers l'Oüeſt du méridien de Londres, & l'autre, où la déclinaiſon de part & d'autre ſuit une loi oppoſée le coupe au 119° vers l'Eſt du méridien de Londres, de ſorte que l'intervalle entre ces deux interſections eſt 136°. Or, ſelon le calcul que je viens de faire ici, cet intervalle ſe trouve de 210°, lequel en changeant les élémens pourroit bien devenir plus petit : mais on ne le ſauroit diminuer au delà de 180°, tant qu'on ſuppoſe le pole méridional magnétique plus éloigné du pole antarctique que le pole boréal du pole arctique, & plus avancé vers l'Oüeſt comme les autres phénomenes l'éxigent évidemment. Et ſi l'on pouvoit bien compter ſur les interſections, je dois avoüer qu'il faudroit abandonner cette hypothéſe de deux poles magnétiques.

III REMARQUE.

CXXXIX. Examinons donc plus ſoigneuſement ſur quoi fonde M. *Halley* la poſition de ces lignes ſans déclinaiſon pour l'année 1700.

1700. Et d'abord j'obſerve, que M. *Halley* ne la donne pas lui-même pour fort exacte, tant faute d'un aſſez grand nombre d'obſervations, que principalement, puisque la plûpart des obſervations ſur leſquelles cette Carte eſt dreſſée, ont été faites très longtems avant l'époque de 1700. Or l'on ſait que la déclinaiſon au même endroit change très conſidérablement avec le tems, & il auroit falu connoitre exactement ce changement annuel pour chaque endroit, avant qu'on ait pu faire uſage de ces obſervations. A Paris par exemple la déclinaiſon fut nulle en 1666, & en 1756 l'aiguille déclinoit de 17°, 45′ vers l'Oüeſt, d'où il s'enſuit que la ligne ſans déclinaiſon, qui paſſoit en 1666 par Paris, s'eſt avancée dans cet intervalle de 90 ans environ par un eſpace de 100° vers l'Eſt, ce qui fait plus d'un degré par an. Or il paroit par les obſervations que M. *Halley* rapporte, qu'à l'Iſle de *Helena* la déclinaiſon étoit 0°, 40′ vers l'Eſt en 1677; & la Carte montre encore pour 1700 preſque la même déclinaiſon. Enſuite, aux côtes découvertes par Diemen, c'étoit en 1642, que la déclinaiſon fut obſervée nulle, & la Carte dreſſée pour 1700 repréſente la ligne ſans déclinaiſon à peu près encore au même endroit: quoique par le changement obſervé à Paris il ſemble, que cette ligne devroit être avancée dans cet intervalle vers l'Eſt par 60°, ce qui s'accorderoit fort bien avec l'intervalle de 210°, que mon calcul indique. De là je conclus que cet intervalle a été effectivement en 1700 beaucoup plus grand que la Carte Halleyenne ne le repréſente.

IV REMARQUE.

CXL. La Carte que Mrs. *Mountaine* & *Dodſon* ont publiée pour l'année 1744 s'accorde beaucoup plus à cet égard avec ma Théorie, ledit intervalle y étant de 170°: mais elle renferme d'autres irrégularités, qui ſont tout à fait incompatibles. Elle donne à la ligne ſans déclinaiſon un tour ſi bizarre par les Indes orientales, qu'il ne ſauroit être accordé avec aucune Théorie: & il ſemble que les Auteurs y ont voulu repréſenter à la fois des obſervations plus vieilles & plus modernes: d'ailleurs les erreurs auxquelles les obſervations ſont aſſujet-

ties

ties, ne permettroient jamais de découvrir un tel tour bizarre, quand même il y en auroit un. Après cela, la route qu'ils donnent à cette ligne ſans déclinaiſon, & qu'ils tirent par le Japon, eſt ouvertement fauſſe, puisqu'on ſait par les obſervations faites en Sibérie que cette ligne y paſſe : d'où je conclud qu'elle auroit du être continuée depuis l'équateur, par la Chine, & de là par la Tartarie : & par cette raiſon les lignes qu'ils ont tirées dans la Mer pacifique, ſurtout dans ſa partie ſeptentrionale, doivent manquer de fondement.

V REMARQUE.

CXLI. Au reſte le cas que je viens de calculer, ne différera pas beaucoup de l'état magnétique de la Terre pour l'année 1744, ſi l'on place, autant que je puis conclure des obſervations qui paroiſſent les plus certaines, le pole magnétique ſeptentrional dans le méridien marqué de 250° dans les Cartes : car alors on obtiendra, tant pour l'Europe que pour l'Amérique ſeptentrionale, les déclinaiſons qu'on a obſervées actuellement. Or pour les côtes du Bréſil elles deviendroient un peu trop petites ; mais, pour redreſſer cette erreur, on n'a qu'à augmenter la diſtance du pole méridional magnétique, ou à augmenter l'angle γ entre les méridiens tirés par les poles magnétiques. Je crois qu'il faudroit faire l'un & l'autre à la fois pour expliquer les déclinaiſons obſervées ſur les côtes orientales de l'Afrique, & aux Indes orientales, puisqu'ici les grandes déclinaiſons s'étendent jusqu'à l'équateur. Comme ici j'ai ſuppoſé $a = 14°,53'$; $b = 29°,23'$; & $\gamma = 53°,18'$, il ſera bon de calculer encore quelques autres hypothéſes, en laiſſant deux élémens les mêmes, & changeant ſeulement le troiſième : car alors, ſi l'on dreſſe ſur chacune une Carte en ſorte, qu'elle reponde aux déclinaiſons de l'Europe, on verra aiſément laquelle approche le mieux aux autres parties de la Terre. Par ce moyen, après avoir fait quelques repréſentations ſur des hypotheſes différentes, il ne ſera pas difficile d'en conclure la vraye ſituation des poles magnétiques, qui a eu lieu alors. Après quelques eſſimes je voudrois croire, qu'en A. 1744. la diſtance a étoit plus petite que $14°,53'$, & la dis-

diſtance b un peu plus grande que 29°, 23′ : mais qu'il faudroit augmenter l'angle γ au de là de 60° : ces trois corrections ſemblent néceſſaires pour repréſenter les grandes déclinaiſons dans les mers des Indes orientales.

HYPOTHESE.

CXLII. Pour repréſenter à peu près les lignes magnétiques pour à préſent, j'ai dreſſé une Carte ſemblable à celle de *Halley* ſur les élémens ſuivans : $a = 14°$, $b = 35°$, & $\gamma = 63$

d'où l'on a $c = 68°, 31'$, $d = 78°, 5'$, & $e = 10°, 41'$

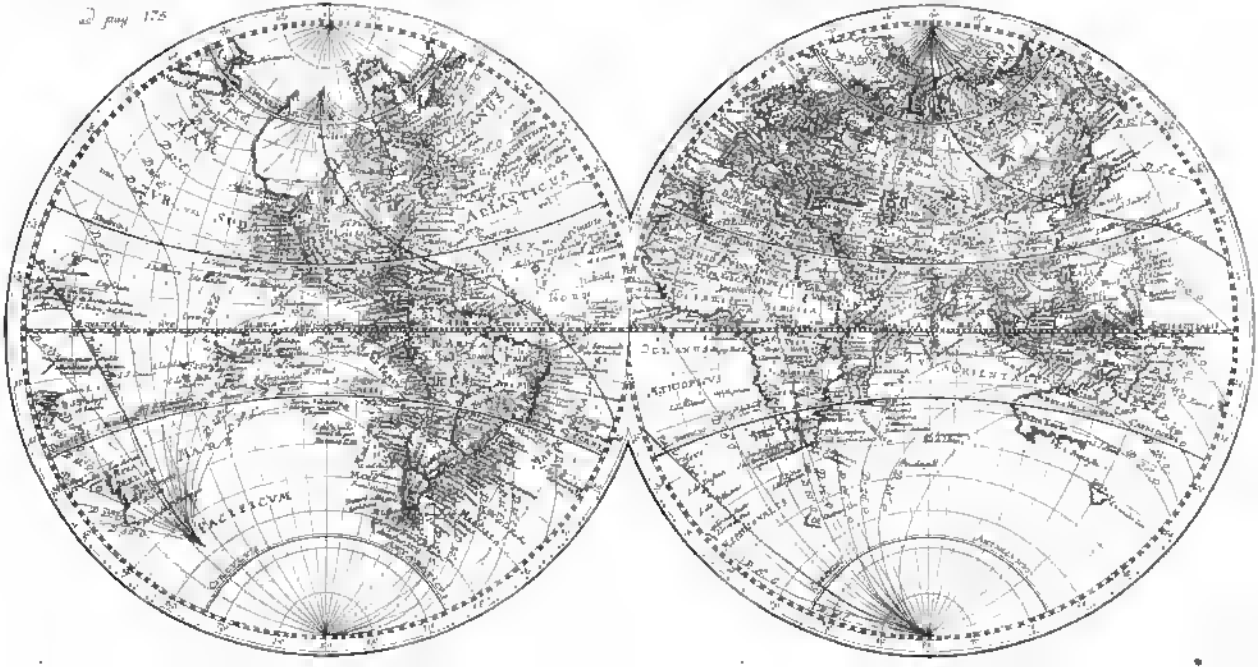
& les lignes qui ſe croiſent, répondent à la déclinaiſon de 12°, 5′. Si l'on compare cette Carte avec celle qui a été publiée en Angleterre pour l'année 1744. on y remarquera un aſſez bel accord, ſur tout à l'égard des déclinaiſons qui paroiſſent les plus ſures. Et ſi l'on y découvre quelques aberrationis, il ne ſera pas difficile de trouver les corrections qu'il faudra apporter aux élémens ſuppoſés. Les réflexions ſuivantes nous pourront fournir les éclairciſſemens néceſſaires là deſſus.

I. Puisque la déclinaiſon à l'Isle de S. Helene a ſurpaſſé 5°, & qu'à Paris la déclinaiſon n'a pas été ſi grande que ſur ma Carte, je voudrois d'abord reculer toutes les lignes magnétiques de 10° vers l'ouëſt, pour la mettre d'accord avec les obſervations. Or, ſi depuis 1744. jusqu'à préſent les poles magnétiques étoient avancés vers l'eſt de 10°, la Carte devroit répondre à l'état préſent, ce qui eſt la raiſon que je les ai fixés en ſorte ſur la Carte.

II. Maintenant les déclinaiſons marquées ſur la Carte aux côtes orientales du Bréſil, étant parfaitement d'accord avec celles que marque la Carte Angloiſe pour l'an 1744 : cet accord ſera détruit, lorsqu'on avance toutes les lignes de 10° vers l'oüeſt : mais on

on y remédiera en augmentant la distance du pole magnétique méridional au pole antarctique. Je voudrois donc mettre $b = 40°$: & par là on s'approcheroit aussi davantage des grandes déclinaisons, qui s'observent vers l'équateur dans la Mer des Indes.

III. Si la déclinaison dans le détroit de Hudson a été de 35° A. 1744, il est clair qu'il faudroit aussi augmenter la distance du pole magnétique boréal au pole arctique ; peut être suffira-t-il de poser $a = 17°$. Au reste je ne trouve aucune raison, pourquoi il faudroit changer l'angle γ ; de sorte que supposant ces élémens : $a = 17°$, $b = 40°$, & $\gamma = 63°$, on représentera assez exactement l'état des lignes magnétiques pour l'année 1744. Cependant ces élémens ne sont pas si exacts, qu'il vaudroit la peine d'y fonder un nouveau calcul.


ad pag. 176
ARCTICUS
PACIFICUM
ATLANTICUM
AUSTRALIS

Tab. I.

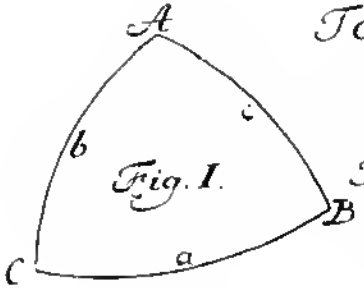


Fig. I.

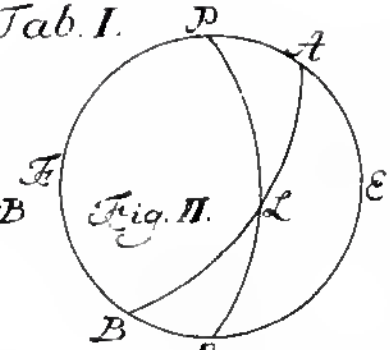


Fig. II.

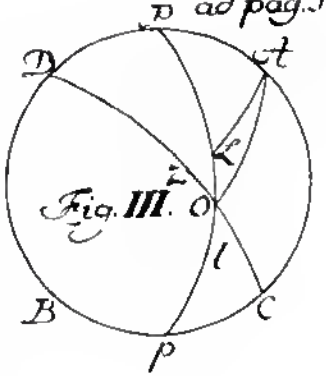


Fig. III.

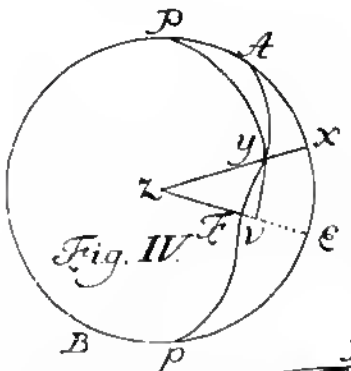


Fig. IV.

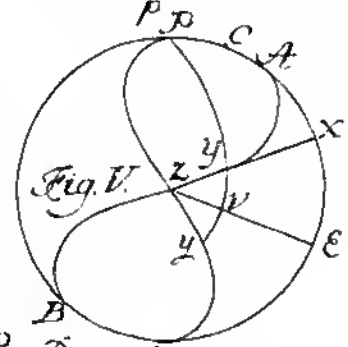


Fig. V.

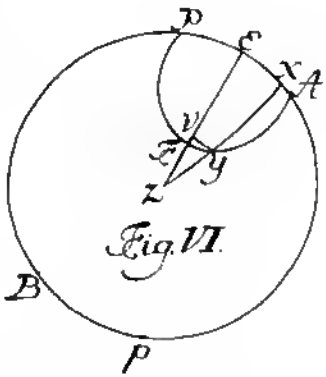


Fig. VI.

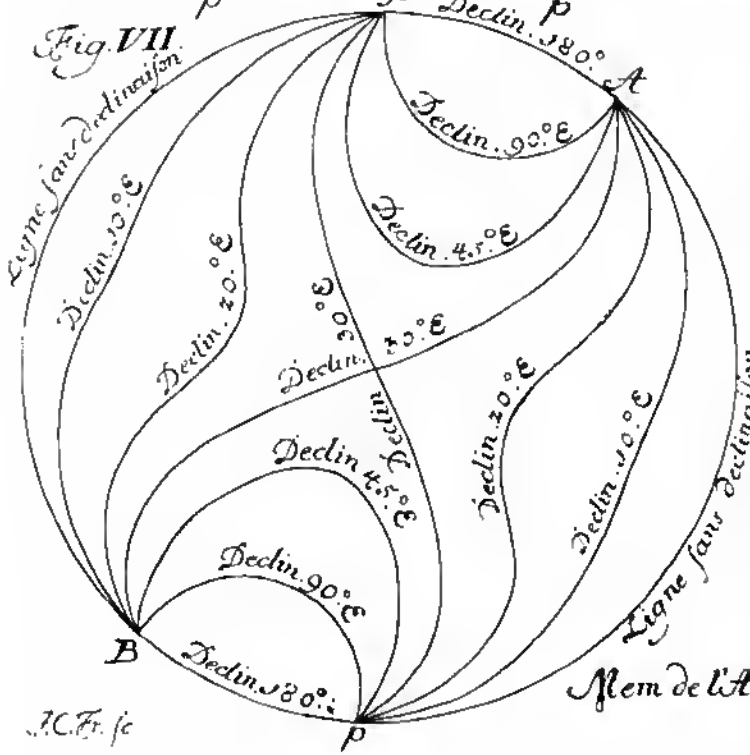
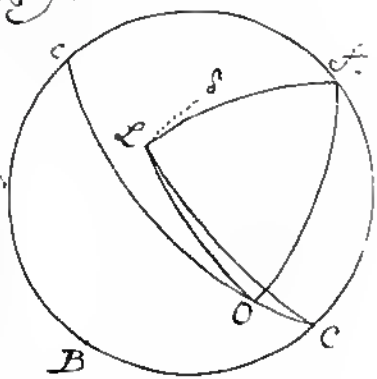


Fig. VII.

Fig. VIII.



M.C.Fr. sc

Tab. II. ad pag. 375.

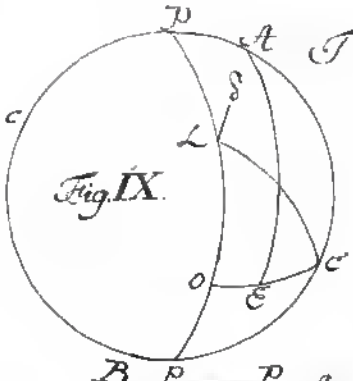


Fig. IX.

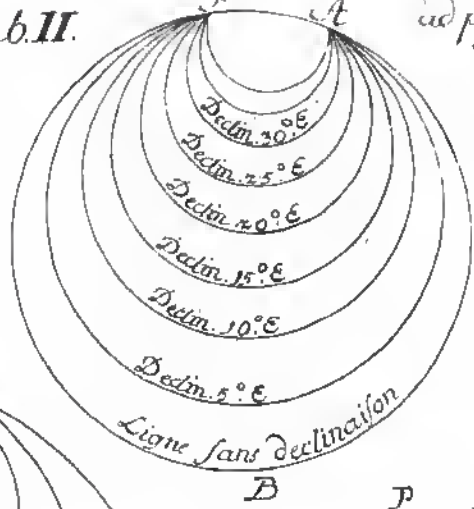


Fig. X.

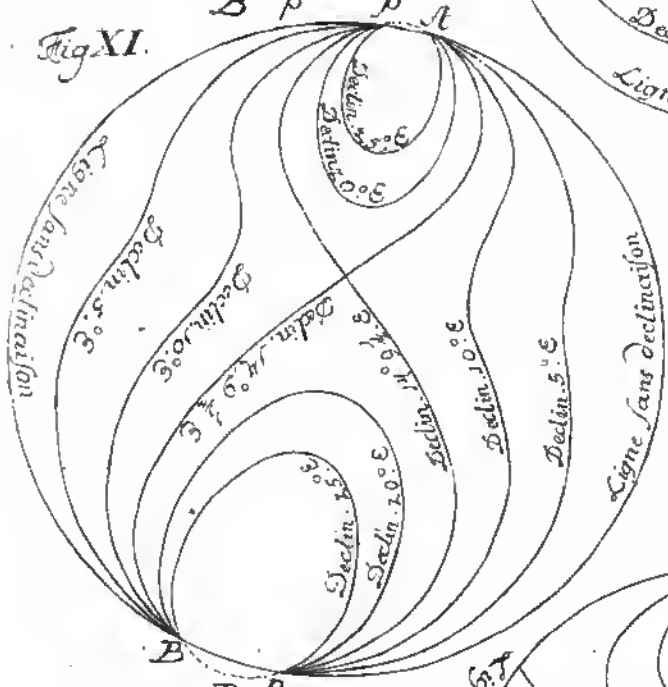


Fig. XI.

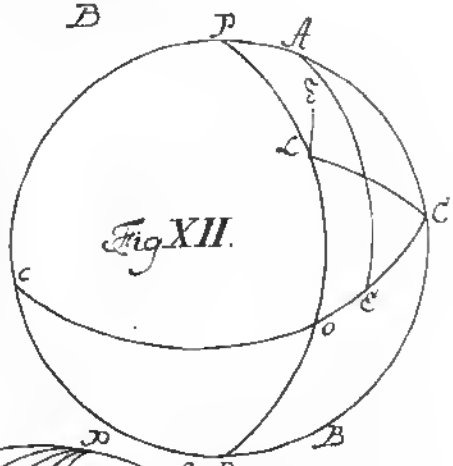


Fig. XII.

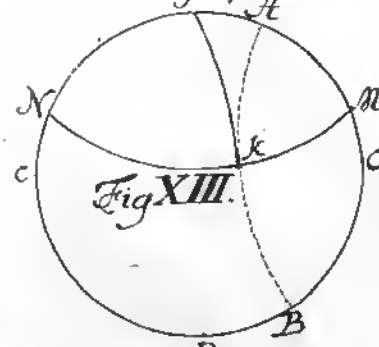


Fig. XIII.

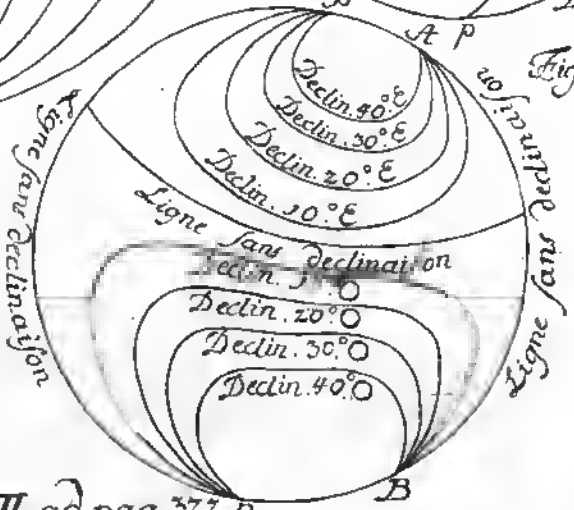


Fig. XIV.

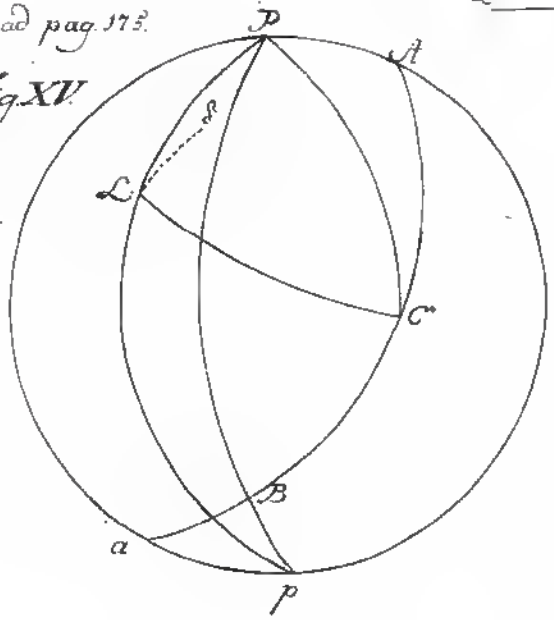
Mem. de l'Acad. Tom. XIII. ad pag. 372. p.

J. C. Tr. sc.

Tab. III.

ad pag. 373.

Fig. XV.



ad pag. 372.

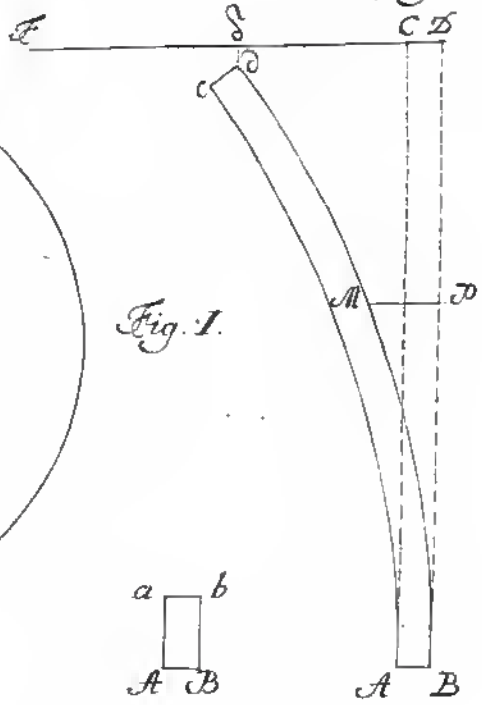


Fig. I.

Fig. II.

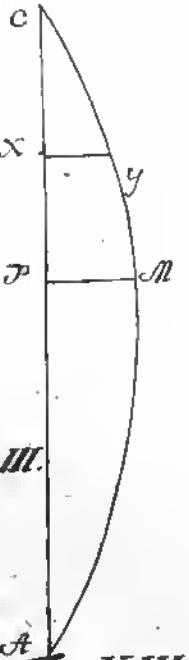


Fig. III.

J. C. Fr. sc.

Mem de l'Acad Tom. XIII. ad pag. 372.